ОБЪ ОПРЕДѢЛЕНІИ ВЪ КОНЕЧНОМЪ ВИДѢ АБЕЛЕВЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

Д. Мордухай-Болтовского.

§ 1. На основаніи изслѣдованія Абеля[1]), Льювилля[2]), Гурса[3]) и И. Л. Пташицкаго[4]) задача о выраженіи въ конечномъ видѣ Абелева интеграла $\int F(x, y)dx$ приводится къ слѣдующей задачѣ:

Узнать, можно ли интегралъ:

$$J = \sum_{k=1}^{k=p} n_k \Pi_{(\xi, \eta)}^{(\xi_k, \eta_k)}, \tag{1}$$

гдѣ $\Pi_{(\xi, \eta)}^{(\xi_k, \eta_k)}$ *нормальные интегралы третьяго рода съ двумя логариѳмическими точками* (ξ_k, η_k), (ξ, η), n_k *цѣлыя числа,* p *родъ кривой порядка* n:

$$f(x, y)=0, \tag{2}$$

---

[1]) *Abel.* Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, Journal de Crelle. B. IV. 1829 или Oeuvres t. I, p. 545.

[2]) *Liouville.* Mémoire sur l'integration d'une classe de fonctions transcendantes. Journal de Crelle. B. XIII. 1835 и другіе его мемуары.

[3]) *Appell et Goursat.* Théorie des fonctions algébriques p. 161.

[4]) *Пташицкій.* Общія предложенія объ интегрированіи въ конечномъ видѣ Абелевыхъ интеграловъ „Математ. Сборникъ“ т. 31 стр. 387—430.

опредѣляющей интегралъ J, представить въ видѣ выраженія:

$$\frac{1}{m}\log Q(x, y) - \int F^{(1)}(x, y)dx, \tag{3}$$

гдѣ $Q(x, y)$ раціональная функція (x, y), m цѣлое число, $\int F^{(1)}(x, y)dx$ интегралъ перваго рода.

Дальнѣйшая метода изслѣдованія можетъ быть алгебраической и этой методой пользуется И. Л. Пташицкій, обобщая идеи Абеля и П. Л. Чебышева. Но возможенъ еще другой методъ изслѣдованія, основанный на свойствахъ трансцендентныхъ тета-функцій, представляющій обобщеніе методы, примѣняемой Гальфеномъ [1]), И. П. Долбней [2]) и А. А. Марковымъ [3]), основанной на идеяхъ Вейерштрасса [4]) и Золотарева [5]). Послѣдняя метода своимъ развитіемъ въ особенности обязана И. П. Долбнѣ, который прилагаетъ ее къ цѣлому ряду интересныхъ изслѣдованій.

Обобщеніе этой методы должно основываться на выраженіи Клебшевской функціи:

$$T^{(\xi_k, \eta_k)}_{(\xi, \eta)}\begin{pmatrix} x^{(j)}, & y^{(j)} \\ x^{(j0)}, & y^{(j0)} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(x^{(j0)}, y^{(j0)})}^{(x^{(j)}, y^{(j)})} d\Pi^{(\xi_k, \eta_k)}_{(\xi, \eta)} \tag{4}$$

черезъ функціи тета отъ многихъ аргументовъ, а именно, въ

---

1) *Halphen.* Théorie des fonctions elliptiques. t. III.

2) *И. П. Долбня.* О псевдо эллиптическихъ интегралахъ Абеля. Сообщенія Общества Естествознанія въ Казани за 1890 годъ и другія его работы.

3) *А. А. Марковъ.* О псевдо-эллиптическихъ интегралахъ вида $\int \frac{xdx}{(x^3+c)\sqrt{x^3+d}}$. С.-Петербургъ, 1894 годъ.

4) *Weierstrass.* Ueber die Integration algebraicher Differentiale vermittelst Logarithmen. Monatsb. der Kön. Acad. за 1857 или Werke B. I. 527.

5) *Е. Золотаревъ.* Теорія цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ стр. 124 или Sur la méthode de M. Tchebychef. Journ. de Liouville s. 2, t. 19.

своемъ классическомъ сочиненіи Клебшъ и Горданъ[1]) даютъ слѣдующую формулу:

$$T^{(\xi_k,\,\eta_k)}_{(\xi,\,\eta)}\begin{pmatrix}x^{(j)}, & y^{(j)}\\ x^{(j0)}, & y^{(j0)}\end{pmatrix}=\log\frac{\Theta[u_i-M_{ik}]\Theta[u_i^{(0)}-M_i\,]}{\Theta[u_i-M_i\,]\Theta[u_i^{(0)}-M_{ik}]}, \tag{5}$$

гдѣ функція Θ опредѣляется формулой:

$$\Theta[u_i]=\Theta(u_1,\ u_2\ldots u_p)=$$

$$=\sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty}\ \sum_{m_2=-\infty}^{m_2=+\infty}\cdots\sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{i=1}^{i=p} m_i u_i+\frac{1}{2}\sum\limits_{i,\,k} m_i m_k \tau_{ik}} \tag{6}$$

въ которой

$$u_i=\sum_{j=1}^{j=p}\int\limits_{(\alpha^{(j)},\ \beta^{(j)})}^{(x^{(j)},\ y^{(j)})} dJ_i \tag{7}$$

$$u_i^{(0)}=\sum_{j=1}^{j=p}\int\limits_{(\alpha^{(j)},\ \beta^{(j)})}^{(x^{(j0)},\ y^{(j0)})} dJ_i\ , \tag{8}$$

J_i нормальные интегралы перваго рода, т. е. съ системой періодовъ, опредѣляемой таблицей:

$$\left|\begin{array}{llllll}
2\pi\sqrt{-1} & 0 & 0\ldots\ldots.0 & \tau_{1.1} & \tau_{1.2}\ldots\ldots\tau_{1.p}\\
0 & 2\pi\sqrt{-1} & 0\ldots\ldots.0 & \tau_{2.1} & \tau_{2.2}\ldots\ldots\tau_{2.p}\\
0 & 0 & 2\pi\sqrt{-1}\ldots0 & \tau_{3.1} & \tau_{3.2}\ldots\ldots\tau_{3.p}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & 0\ldots\ldots2\pi\sqrt{-1} & \tau_{p.1} & \tau_{p.2}\ldots\ldots\tau_{p.p}
\end{array}\right| \tag{9}$$

[1]) *Clebsch und Gordan.* Theorie der Abelschen Functionen. S. 198. Въ формулѣ (1) § 57 очевидная опечатка; см. § 45.

$$M_{ik}=\int\limits_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi_k,\ \eta_k)} dJ_i \tag{10}$$

$$M_i=\int\limits_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi,\ \eta)} dJ_i\ . \tag{11}$$

Точка (μ, ν)—произвольная точка кривой, а точки $(\alpha^{(j)}, \beta^{(j)})$ опредѣляются слѣдующимъ образомъ:

Черезъ точку (μ, ν) проводимъ касательную къ кривой (2). Черезъ точки пересѣченія касательной кривой (2) проводимъ союзную кривую $\overline{n-2}$ порядка при условіи, чтобы она, кромѣ того, касалась кривой въ p точкахъ. Эти p точекъ и будутъ $(\alpha^{(j)}, \beta^{(j)})$.

Формула (5) согласно замѣчанію Клебша и Гордана при

$$x^{(j)}=x^{(j0)},\ y^{(j)}=y^{(j0)}$$

$$j=2,\ 3\ldots p$$

даетъ выраженіе нормальнаго интеграла третьяго рода черезъ тета-функціи

$$\int\limits_{(x^{(10)},\ y^{(10)})}^{(x^{(1)},\ y^{(1)})} d\Pi_{(\xi,\ \eta)}^{(\xi_k,\ \eta_k)}=\log\frac{\Theta[u_i-M_{ik}]\Theta[v_i^{(0)}-M_i\,]}{\Theta[u_i-M_i\,]\Theta[v_i^{(0)}-M_{ik}]}, \tag{12}$$

гдѣ

$$v_i^{(0)}=\int\limits_{(\alpha^{(1)},\ \beta^{(1)})}^{(x^{(1)},\ y^{(1)})} dJ_i+\sum_{j=2}^{j=p}\ \int\limits_{(\alpha^{(j)},\ \beta^{(j)})}^{(x^{(j0)},\ y^{(j0)})} dJ_i, \tag{13}$$

а отсюда для J получаемъ выраженіе:

$$J=\log\frac{\prod\limits_{k=1}^{k=p}\Theta^{n_k}[u_i-M_{ik}]\,\Theta^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}n_k}[v_i^{(0)}-M_i]}{\prod\limits_{k=1}^{k=p}\Theta^{n_k}[v_i^{(0)}-M_{ik}]\,\Theta^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}n_k}[u_i-M_i]}\,. \tag{14}$$

На основаніи этой формулы, поставленную въ началѣ этого параграфа задачу можно замѣнить слѣдующей:

Узнать, существуютъ ли такія числа $A^{(i)}$ и раціональная функція $Q(x^{(1)}, y^{(1)})$, при которыхъ имѣетъ мѣсто тождество:

$$K=\log\frac{\prod\limits_{k=1}^{k=p}\Theta^{n_k}[u_i-M_{ik}]\,\Theta^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}n_k}[v_i^{(0)}-M_i]}{\prod\limits_{k=1}^{k=p}\Theta^{n_k}[v_i^{(0)}-M_{ik}]\,\Theta^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}n_k}[u_i-M_i]}+ \tag{15}$$

$$+\sum_{k=1}^{k=p}A_k\int_{(\alpha^{(j)},\,\beta^{(j)})}^{(x^{(j)},\,y^{(j)})}dJ_k=\frac{1}{m}\log Q(x^{(1)},\,y^{(1)}).$$

§ 2. Если мы теперь заставимъ точку $(x^{(1)}, y^{(1)})$ описывать на Римановской поверхности (x, y) замкнутый путь, отвѣчающій p первымъ столбцамъ таблицы періодовъ (9), то получимъ изъ уравненія (15), на основаніи формулы:

$$\Theta\left[u_i+2\pi\sqrt{-1}\right]=\Theta\left[u_i\right] \tag{16}$$

$$A_k2\pi\sqrt{-1}=\frac{2\pi\lambda_k}{m}\sqrt{-1}\,,$$

откуда

$$A_k=\frac{\lambda_k}{m} \tag{17}$$

числа раціональныя.

Если же точка $(x^{(1)}, y^{(1)})$ описываетъ замкнутый путь, отвѣчающій послѣднимъ p столбцамъ таблицы (9), то на основаніи формулы:

$$\Theta\left[u_i+\tau_{ij}\right]=\Theta\left[u_i\right]e^{-\tau_{j.j}-u_j} \tag{18}$$

получаемъ изъ уравненія (15):

$$\sum_{k=1}^{k=p} n_k \int_{(\xi,\,\eta)}^{(\xi^{(k)},\,\eta^{(k)})} dJ_i - \sum_{k=1}^{k=p} A^{(k)}\tau_{ki} = \frac{2\pi\mu_i\sqrt{-1}}{m}.$$

$$i=1,\ 2\,\ldots\,p$$

или, на основаніи уравненія (17) и уравненія

$$\tau_{ki}=\tau_{ik}$$

$$\sum_{k=1}^{k=p} n_k \int_{(\xi,\,\eta)}^{(\xi^{(k)},\,\eta^{(k)})} dJ_i = \frac{2\pi\mu_i\sqrt{-1}+\sum\limits_{k=1}^{k=p}\lambda_k\tau_{ki}}{m}. \tag{19}$$

Это уравненіе будетъ необходимымъ условіемъ, чтобы интегралъ J выражался въ указанномъ въ § 1 видѣ или, какъ будемъ говорить, *необходимымъ условіемъ интегрируемости въ конечномъ видѣ.*

Обратно, если условія (19) удовлетворяются, на основаніи формулъ (10) и (17) функція:

$$e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}\frac{\lambda^{(k)}}{m}\int_{(a^{(j)},\,\beta^{(j)})}^{(x^{(j)},\,y^{(j)})} dJ_k} \left[\frac{\prod\limits_{k=1}^{k=p}\Theta^{n_k}[u_i-M_{ik}]\,\Theta^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}n_k}[v_i^{(0)}-M_i]}{\sum\limits_{k=1}^{k=p}\Theta^{n_k}[v_i^{(0)}-M_{ik}]\,\Theta^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}n_k}[u_i-M_i]}\right]^m, \tag{20}$$

какъ функція однозначная $(x^{(1)}, y^{(1)})$ будетъ равна $Q(x^{(1)}, y^{(1)})$ и на основаніи уравненія (15), J приводится къ $\frac{1}{m}\log Q(x^{(1)}, y^{(1)})-$ $-\int F^{(1)}(x, y)dx$, гдѣ $\int F^{(1)}(x, y)dx$ интегралъ перваго рода.

Такимъ образомъ: *условіе (19) не только необходимое но и достаточное условіе интегрируемости въ конечномъ видѣ.* Оно представляетъ обобщеніе *условій Вейерштрасса* [1]) интегрируемости въ конечномъ видѣ эллиптическихъ интеграловъ, обобщенное Поссе [2]) на случай ультраэллиптическихъ интеграловъ перваго класса типа $\int \frac{x^2+Ax+B}{\sqrt{R(x)}}dx$.

§ 3. Мы отмѣтимъ теперь одно весьма интересное преобразованіе выраженія интеграла

$$J=\sum_{k=1}^{k=p} n_k \Pi_{(\xi, \eta)}^{(\xi_k, \eta_k)} \tag{1}$$

черезъ функціи тета, весьма важное въ нашихъ послѣдующихъ изслѣдованіяхъ.

Положимъ, что $(\xi^{(\alpha j)}, \eta^{(\alpha j)})$ опредѣляются, какъ алгебраическія функціи $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$ согласно теоремѣ Абеля [3]), системой трансцендентныхъ уравненій:

$$\sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu, \nu)}^{(\xi_1^{(\alpha j)}, \eta_1^{(\alpha j)})} dJ = \sum_{k=1}^{k=p} n_k \int_{(\mu, \nu)}^{(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})} dJ_i \tag{21α}$$

$$i=1, 2 \ldots . p,$$

---

[1]) *Weierstrass.* Werke. Band I. S. 223.

[2]) *К. А. Поссе.* О функціяхъ ϑ отъ двухъ аргументовъ и о задачѣ Якоби. Прибавленіе. стр. 50.

[3]) О приведеніи суммы Абелевыхъ интеграловъ къ суммѣ p интеграловъ см. мое сочиненіе: „О приведеніи Абелевыхъ интеграловъ къ низшимъ трансцендентнымъ“. Извѣстія Варш. Пол. Инст. за 1905 годъ стр. 63.

$$\sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi_1^{(\beta j)},\ \eta_1^{(\beta j)})} dJ_i = \sum_{k=1}^{k=p} n_k \int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi,\ \eta)} dJ_i \tag{21β}$$

$$i=1,\ 2 \ldots . p$$

причемъ $(\xi_1^{(\alpha j)},\ \eta_1^{(\alpha j)})$, $(\xi_1^{(\beta j)},\ \eta_1^{(\beta j)})$ опредѣляются уравненіями типа:

$$A_0(\xi^{(1)},\ \eta^{(1)} \ldots . \xi^{(p)},\ \eta^{(p)}) \xi^{(\alpha j)p} + \\ + A_1(\xi^{(1)}, \eta^{(1)} \ldots . \xi^{(p)},\ \eta^{(p)}) \xi^{(\alpha j)p-1} + \ldots . A_p(\xi^{(1)},\ \eta^{(1)} \ldots . \xi^{(p)},\ \eta^{(p)}) = 0 \tag{22α}$$

$$A_0(\xi,\ \eta)\xi^{(\alpha j)p} + A_1(\xi,\ \eta)\xi^{(\alpha j)p-1} + \ldots . A_p(\xi,\ \eta) = 0, \tag{22β}$$

гдѣ $A_i(\xi^{(1},\ \eta^{(1)} \ldots . \xi^{(p)},\ \eta^{(p)})$ раціональная функція отъ

$$\xi^{(1)},\ \eta^{(1)},\ \xi^{(2)},\ \eta^{(2)} \ldots . \xi^{p)},\ \eta^{(p)}, \tag{23}$$

а $A_i(\xi,\ \eta)$ раціональная функція отъ ξ, η; $\eta^{(\alpha j)}$ опредѣляется въ общемъ случаѣ, когда уравненіе (22α) не имѣетъ кратныхъ корней уравненіемъ:

$$\eta^{(\alpha j)} = S(\xi^{(\alpha j)},\ \xi^{(1)},\ \eta^{(1)} \ldots . \xi^{(p)},\ \eta^{(p)},) \tag{24α}$$

гдѣ S раціональная функція $\xi^{(\alpha j)}$ и величинъ (23); если же $\xi^{(\alpha j)}$ кратный корень уравненія (22α) степени кратности равной ω, то уравненіе (24α) замѣняется слѣдующимъ уравненіемъ:

$$S_0(\xi^{(\alpha j)},\ \xi^{(1)},\ \eta^{(1)} \ldots . \xi^{(p)},\ \eta^{(p)})\ \eta^{(\alpha j)\omega} + \\ + \ldots . S_\omega(\xi^{(\alpha j)},\ \xi^{(1)},\ \eta^{(1)} \ldots . \xi^{(p)},\ \eta^{(p)}) = 0, \tag{25α}$$

гдѣ $S_i(\xi^{(\alpha j)}, \xi^{(1)}, \eta^{(1)} \ldots . \xi^{(p)},\ \eta^{(p)})$ раціональныя функціи $\xi^{(\alpha j)}$ и величинъ (23). Такимъ же образомъ $(\xi^{(\beta j)},\ \eta^{(\beta j)})$ опредѣляются уравненіями:

$$A_0(\xi,\ \eta)\xi^{(\beta j)p} + A_1(\xi,\ \eta)\xi^{(\beta j)p-1} + \ldots A_p(\xi,\ \eta) = 0 \tag{22β}$$

$$\eta^{(\beta j)} = S(\xi^{(\beta j)},\ \xi,\ \eta) \tag{23β}$$

или

$$S_0(\xi^{(\beta j)},\ \xi,\ \eta)\eta^{(\beta j)\omega} + \ldots . S_\omega(\xi^{(\beta j)},\ \xi,\ \eta) = 0, \tag{25β}$$

гдѣ $A_i(\xi, \eta)$ раціональная функція (ξ, η), $S_i(\xi^{(\beta j)}, \xi, \eta)$ раціональныя функціи $(\xi^{(\beta j)}, \xi, \eta)$.

Функція

$$\frac{\prod_{k=1}^{k=p} \Theta^{n_k}[u_i - M_{ik}]\,\Theta^{\sum_{k=1}^{k=p} n_k}[v_i^{(0)} - M_i]\,\Theta[v_i - M^{(1)}{}_{i\alpha}]\,\Theta[u_i - M^{(1)}{}_{i\beta}]}{\prod_{k=1}^{k=p} \Theta^{n_k}[v_i^{(0)} - M_{ik}]\,\Theta^{\sum_{k=1}^{k=p} n_k}[u_i - M_i]\,\Theta[u_i - M^{(1)}{}_{i\alpha}]\,\Theta[v_i - M^{(1)}{}_{i\beta}]} \tag{26}$$

гдѣ

$$M^{(1)}{}_{i\alpha} = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi_1^{(\alpha j)},\ \eta_1^{(\alpha j)})} dJ_i \tag{27α}$$

$$i = 1,\ 2 \ldots p$$

$$M^{(1)}{}_{i\beta} = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi_1^{(\beta j)},\ \eta_1^{(\beta j)})} dJ_i\ , \tag{27β}$$

$$i = 1,\ 2 \ldots p$$

какъ функція однозначная на Римановской поверхности будетъ приводится къ раціональной функціи $R(x^{(1)}, y^{(1)})$ отъ $(x^{(1)}, y^{(1)})$; поэтому выраженіе (15) приводится къ виду:

$$K = \log R(x^{(1)}, y^{(1)}) + \log \frac{\Theta[u_i - M^{(1)}{}_{i\alpha}]\,\Theta[v_i - M^{(1)}{}_{i\beta}]}{\Theta[v_i - M^{(1)}{}_{i\alpha}]\,\Theta[u_i - M_{i\beta}]}\,. \tag{28}$$

Поставленная въ § 1 задача приводится теперь къ задачѣ *о выраженіи функціи*

$$\Omega^{(1)} = \log \frac{\Theta[u_i - M^{(1)}{}_{i\alpha}]\,\Theta[v_i^{(0)} - M^{(1)}{}_{i\beta}]}{\Theta[v_i - M^{(1)}{}_{i\alpha}]\,\Theta[u_i^{(0)} - M_{i\beta}]} \tag{29}$$

въ видѣ:

$$\frac{1}{m}\log Q(x^{(1)}, y^{(1)}) - \int F^{(1)}(x^{(1)}, y^{(1)})\,dx^{(1)}.$$

На основаніи уравненій (19), (21α) и (21β)

$$w_i^{(1)}=M^{(1)}_{\alpha i}-M^{(1)}_{\beta i}=\frac{2\pi\mu_i\sqrt{-1}+\sum_{k=1}^{k=p}\lambda_k\tau_{ki}}{m}. \tag{30}$$

Положимъ, что $(\xi_2^{(\alpha j)}, \eta_2^{(\alpha j)})$, $(\xi_2^{(\beta j)}, \eta_2^{(\beta j)})$ опредѣляются системами трансцендентныхъ уравненій

$$\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\,\nu)}^{(\xi_2^{(\alpha j)},\,\eta_2^{(\alpha j)})} dJ_i = q\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\,\nu)}^{(\xi_1^{(\alpha j)},\,\eta_1^{(\alpha j)})} dJ_i \tag{31α}$$

$$i=1,\ 2\ \ldots\ p$$

$$\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\,\nu)}^{(\xi_2^{(\beta j)},\,\eta_2^{(\beta j)})} dJ_i = q\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\,\nu)}^{(\xi_1^{(\beta j)},\,\eta_1^{(\beta j)})} dJ_i, \tag{31β}$$

$$i=1,\ 2\ \ldots\ p$$

гдѣ q простое число

На основаніи теоремы Абеля $(\xi_2^{(\alpha j)}, \eta_2^{(\alpha j)}$, $(\xi_2^{(\beta j)}, \eta_2^{(\beta j)})$ будеть алгебраическими функціями $(\xi_1^{(\alpha j)}, \eta_1^{(\alpha j)})$, $(\xi_1^{(\beta j)}, \eta_1^{(\beta j)})$, опредѣляемыми уравненіями:

$$\begin{gathered} A_0(\xi_1^{(k1)}, \eta_1^{(k1)}\ldots\xi_1^{(kp)}, \eta_1^{(kp)})\xi^p+ \\ +A_1(\xi^{(k1)}, \eta_1^{(k1)}\ldots\xi_1^{(kp)}, \eta_1^{(kp)})\xi^{p-1}+A_p(\xi_1^{(k1)}, \eta_1^{(k1)}\ldots\xi_1^{(kp)}, \eta_1^{(kp)})=0 \end{gathered} \tag{32}$$

$$\eta_2^{(kj)}=S(\xi_2^{(kj)}, \xi_1^{(k1)}, \eta_1^{(k1)}\ \ldots\ \xi_1^{(kp)}, \eta_1^{(kp)}) \tag{33}$$

или

$$\begin{gathered} S_0(\xi_2^{(kj)}, \xi_1^{(k1)}, \eta_1^{(k1)}\ldots\xi_1^{(kp)}, \eta_1^{(kp)})\eta_2^{(kj)^{\omega}}+ \\ +\ldots S_\omega(\xi_2^{(kj)}, \xi_1^{(k1)}, \eta_1^{(k1)}\ldots\xi_1^{(kp)}, \eta_1^{(kp)})=0, \end{gathered} \tag{34}$$

гдѣ $k=\alpha$ или $k=\beta$ и гдѣ $A_i(\xi_1^{(k1)}, \eta_1^{(k1)}\ldots\xi_1^{(kp)}, \eta_1^{(kp)})$ раціональныя симметрическія функціи отъ $(\xi_1^{(kj)}, \eta_1^{(kj)})$, $S_i(\xi_2^{(kj)}, \xi_1^{(k1)}$ $\eta_1^{(k1)} \ldots \xi_1^{(kp)}, \eta_1^{(kp)})$ раціональная функція $\xi_2^{(kj)}$ и раціональная симетрическая функція $(\xi_1^{(kj)}, \eta_1^{(kj)})$. Отсюда слѣдуетъ, что всякая раціональная симметрическая функція $(\xi_2^{(kj)}, \eta_2^{(kj)})$ выразится раціонально чрезъ раціональныя симметрическія функціи $(\xi_1^{(kj)}, \eta_1^{(kj)})$, а эти послѣднія раціонально черезъ $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)}$ или (ξ, η).

Тогда функція:

$$\frac{\Theta^q[u_i-M^{(1)}{}_{i\alpha}]\Theta^q[v_i-M^{(1)}{}_{i\beta}]\Theta[v_i-M^{(2)}{}_{i\alpha}]\Theta[u_i-M^{(2)}{}_{i\beta}]}{\Theta^q[v_i-M^{(1)}{}_{i\alpha})\Theta^q[u_i-M^{(1)}{}_{i\beta}]\Theta[u_i-M^{(2)}{}_{i\alpha}]\Theta[v_i-M^{(2)}{}_{i\beta}]}, \tag{35}$$

какъ функція однозначная на Римановской поверхности приводится къ раціональной функціи $S(x^{(1)}, y^{(1)})$:

$$\Omega^{(1)}=\frac{1}{q}\log S^{(1)}(x^{(1)}, y^{(1)})+\frac{1}{q}\Omega^{(2)}, \tag{36}$$

гдѣ

$$\Omega^{(2)}=\log\frac{\Theta[u_i-M^{(2)}{}_{i\alpha}]\Theta[v_i-M^{(2)}{}_{i\beta}]}{\Theta[v_i-M^{(2)}{}_{i\alpha}]\Theta[u_i-M^{(2)}{}_{i\beta}]} \tag{29^2}$$

и гдѣ

$$M^{(2)}{}_{i\alpha}=\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi_2^{(\alpha j)},\ \eta_2^{(\alpha j)})} dJ_i \tag{27$^2\alpha$}$$

$$i=1,\ 2\ \ldots .\ p$$

$$M^{(2)}{}_{i\beta}=\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi_2^{(\beta j)},\ \eta_2^{(\beta j)})} dJ_i\,. \tag{27$^2\beta$}$$

$$i=1,\ 2\ \ldots\ .\ p$$

Такимъ же образомъ находимъ:

$$\Omega^{(2)}=\frac{1}{q}\log S^{(2)}(x^{(1)},\ y^{(1)})+\frac{1}{q}\,\Omega^{(3)}$$

$$\Omega^{(3)}=\frac{1}{q}\log S^{(3)}(x^{(1)},\ y^{(1)})+\frac{1}{q}\,\Omega^{(4)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{37}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Omega^{(r-1)}=\frac{1}{q}\log S^{(r-1)}(x^{(1)},\ y^{(1)})+\frac{1}{q}\,\Omega^{(r)}$$

$$\Omega^{(r)}=\frac{1}{q}\log S^{(r)}(x^{(1)},\ y^{(1)})+\frac{1}{q}\,\Omega^{(r+1)}$$

$S^{(t)}(x^{(1)},\ y^{(1)})$ раціональныя функціи отъ $(x^{(1)},\ y^{(1)})$

$$\Omega^{(t)}=\log\frac{\Theta[u_i-M^{(t)}{}_{i\alpha}]\,\Theta[v_i-M^{(t)}{}_{i\beta}]}{\Theta[v_i-M^{(t)}{}_{i\alpha}]\,\Theta[u_i-M^{(t)}{}_{i\beta}]} \tag{29^t}$$

$$M^{(t)}{}_{i\alpha}=\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi_t{}^{(\alpha j)},\ \eta_t{}^{(\alpha j)})} dJ_i \tag{27α^t}$$

$$i=1,\ 2\ \ldots\ p$$

$$M^{(t)}{}_{i\beta}=\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi_t{}^{(\beta j)},\ \eta_t{}^{(\beta j)})} dJ_i \tag{27β^t}$$

$$i=1,\ 2\ \ldots\ p$$

причемъ

$$\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi_t{}^{(\alpha j)},\ \eta_t{}^{(\alpha j)})} dJ_i=q\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi_{t-1}^{(\alpha j)},\ \eta_{t-1}^{(\alpha j)})} dJ_i=\ldots=q^{t-1}\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi_1{}^{(\alpha j)},\ \eta_1{}^{(\alpha j)})} dJ_i \tag{31α^j}$$

$$\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi_t^{(\beta j)},\ \eta_t^{(\beta j)})} dJ_i = q\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi_{t-1}^{(\beta j)},\ \eta_{t-1}^{(\beta j)})} dJ_i = \ldots = q^{t-1}\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi_1^{(\beta j)},\ \eta_1^{(\beta j)})} dJ_i \qquad (31\beta^t)$$

откуда раціональныя симметрическія функціи $(\xi_t^{(\alpha j)}, \eta_t^{(\alpha j)})$ и $(\xi_t^{(\beta j)}, \eta_t^{(\beta j)})$ опредѣляются раціонально въ раціональныхъ симметрическихъ функціяхъ $(\xi_{t-1}^{(\alpha j)}, \eta_{t-1}^{(\alpha j)})$ и $(\xi_{t-1}^{(\beta j)}, \eta_{t-1}^{(\beta j)})$, $(\xi_{t-2}^{(\alpha j)}, \eta_{t-2}^{(\alpha j)})$ и $(\xi_{t-2}^{(\beta j)}, \eta_{t-2}^{(\beta j)})$.....$(\xi_1^{(\alpha j)}, \eta_1^{(\alpha j)})$ и $(\xi_1^{(\beta j)}, \eta_1^{(\beta j)})$ и раціонально въ $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$ и (ξ, η).

Положимъ, что m не дѣлится на q, тогда можно найти цѣлое число r удовлетворяющее сравненію:

$$q^r \equiv 1 \ (mod.\ m). \qquad (38)$$

Положимъ въ уравненіяхъ (31) $t=r+1$. Тогда, если условіе (19) удовлетворено, будемъ имѣть:

$$\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\xi_{r+1}^{(\beta j)},\ \eta_{r+1}^{(\beta j)})}^{(\xi_{r+1}^{(\alpha j)},\ \eta_{r+1}^{(\alpha j)})} dJ_i = 2\pi\mu'_i\sqrt{-1} + \sum_{k=1}^{k=p}\lambda'_k\tau_{ki} + \sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\xi_1^{(\beta j)},\ \eta_1^{(\beta j)})}^{(\xi_1^{(\alpha j)},\ \eta_1^{(\alpha j)})} dJ_i, \qquad (39)$$

гдѣ $\mu'_i = h\mu_i$, $\lambda'_k = h\lambda_k$ цѣлыя числа.

На основаніи теоремы Абеля можемъ положить:

$$\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\xi_{r+1}^{(\beta j)},\ \eta_{r+1}^{(\beta j)})}^{(\xi_{r+1}^{(\alpha j)},\ \eta_{r+1}^{(\alpha j)})} dJ_i = \sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi_{r+1}^{(\alpha j)},\ \eta_{r+1}^{(\alpha j)})} dJ_i - \sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi_{r+1}^{(\beta j)},\ \eta_{r+1}^{(\beta j)})} dJ_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi_{r+1}^{(\gamma j)},\ \eta_{r+1}^{(\gamma j)})} dJ_i\ , \qquad (40)$$

такъ что

$$w_i^{(r+1)}=\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\,\nu)}^{(\xi^{(\gamma j)}_{r+1},\;\eta^{(\gamma j)}_{r+1})} dJ_i = q\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\,\nu)}^{(\xi_r^{(\gamma j)},\;\eta_r^{(\gamma j)})} dJ_i = \ldots =$$

$$= q^r\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(\mu,\,\nu)}^{(\xi_r^{(\gamma j)},\;\eta_r^{(\gamma j)})} dJ_i \tag{41}$$

причемъ раціональныя симметрическія функціи $(\xi^{(\gamma j)}_{r+1},\ \eta^{(\gamma j)}_{r+1})$ выражаются раціонально черезъ раціональныя симметрическія функціи $(\xi^{(\gamma j)}_{r},\ \eta^{(\gamma j)}_{r})$, $(\xi^{(\gamma j)}_{r-1},\ \eta^{(\gamma j)}_{r-1})\ldots(\xi^{(\gamma j)}_{1},\ \eta^{(\gamma j)}_{1})$ и, наконецъ раціонально черезъ $(\xi^{(k)},\ \eta^{(k)})$, $(\xi,\ \eta)$; $(\xi^{(\gamma j)}_{r+1},\ \eta^{(\gamma j)}_{r+1})$ можно опредѣлить уравненіями: $\xi^{(\gamma j)}_{r+1}$ уравненіемъ:

$$A_0^{(r+1)}\xi^p+A_1^{(r+1)}\xi^{p-1}+\ldots+A_p^{(r+1)}=0 \tag{42}$$

$\eta^{(\gamma j)}_{r+1}$ въ общемъ случаѣ, когда $\xi^{(\gamma j)}_{r+1}$ не кратный корень уравненія (42), уравненіемъ:

$$B_p^{(r+1)}\eta^{(\gamma j)}_{r+1}=B_0^{(r+1)}\xi^{(\gamma j)^{p-1}}_{r+1}+B_1^{(r+1)}\xi^{(\gamma j)^{p-2}}_{r+1}+\ldots+B_{p-1}^{(r+1)}; \tag{43}$$

если же $\xi^{(\gamma j)}_{r+1}$ кратный корень степени кратности ω, то уравненіемъ:

$$(B_{0.0}^{(r+1)}\xi^{(\gamma j)^{p-1}}_{r+1}+\ldots+B_{p-1.0}^{(r+1)})\,\eta^{(\gamma j)^{\omega}}_{r+1}+(B_{0.1}^{(r+1)}\xi^{(\gamma j)^{p-1}}_{r+1}+$$

$$+\ldots+B_{p-1.1}^{(r+1)})\,\xi^{(\gamma j)^{\omega}}_{r+1}+\ldots+(B_{0.\omega}^{(r+1)}\xi^{(\gamma j)^{p-1}}_{r+1}+\ldots+B_{p-1.\omega}^{(r+1)})=0. \tag{44}$$

Коэффиціенты этихъ уравненій $A_j^{(r+1)}$, $B_j^{(r+1)}$, $B_{j,\,k}^{(r+1)}$, какъ раціональныя симметрическія функціи $(\xi_{r+1}^{(\eta_j)}, \eta_{r+1}^{(\eta_j)})$ будутъ представлять Абелевы функціи отъ аргументовъ:

$$w_i^{(r+1)} = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu,\,\nu)}^{(\xi_{r+1}^{(\eta_j)},\ \eta_{r+1}^{(\eta_j)})} dJ_i$$

и выражаются раціонально черезъ Абелевы функціи $A_j^{(r)}$ отъ аргументовъ:

$$w_i^{(r)} = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu,\,\nu)}^{(\xi_r^{(\eta_j)},\ \eta_r^{(\eta_j)})} dJ_i \quad .$$

Предполагая, что среди $\xi_1^{(\eta_j)}$ нѣтъ равныхъ, составляемъ таблицу Абелевыхъ функцій:

$$\begin{vmatrix} A_0^{(1)}, & A_2^{(1)} \ldots\ldots\ldots A_p^{(1)} \\ B_0^{(1)}, & B_2^{(1)} \ldots\ldots\ldots B_p^{(1)} \end{vmatrix} \quad (\Delta_1),$$

которую обозначаемъ черезъ Δ_1. При помощи сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія, безъ рѣшенія уравненій высшихъ степеней, составляемъ по таблицѣ Δ_1, таблицу Δ_2:

$$\begin{vmatrix} A_0^{(2)}, & A_1^{(2)} \ldots\ldots\ldots A_p^{(2)} \\ B_0^{(2)}, & B_1^{(2)} \ldots\ldots\ldots B_p^{(2)} \end{vmatrix} \quad (\Delta_2).$$

По Δ_2 составляемъ Δ_3 и т. д.

Въ случаѣ равныхъ $\xi_1^{(\eta_j)}$, таблицу Δ_i:

$$\begin{vmatrix} A_0^{(i)}, & A_1^{(i)} \ldots\ldots\ldots A_p^{(i)} \\ B_0^{(i)}, & B_1^{(i)} \ldots\ldots\ldots B_p^{(i)} \end{vmatrix} \quad (\Delta_i).$$

замѣняемъ слѣдующей:

$$\begin{vmatrix} A_0^{(i)}, & A_1^{(i)} & \ldots\ldots\ldots\ldots & A_p^{(i)} \\ B_{0.0}^{(i)}, & B_{1.0}^{(i)} & \ldots\ldots\ldots\ldots & B_{p-1.0}^{(i)} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ B_{0.\omega}^{(i)}, & B_{1.\omega}^{(i)} & \ldots\ldots\ldots\ldots & B_{p-1.\omega}^{(i)} \end{vmatrix} \quad (\Delta_i).$$

Полученное выше уравненіе (39) или, что тоже, на основаніи уравненія (40):

$$\sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi_{r+1}^{(\gamma j)},\ \eta_{r+1}^{(\gamma j)})} dJ_i = 2\pi\mu'_i\sqrt{-1} + \sum_{k=1}^{k=p} \lambda'_k \tau_{ki} + \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi_1^{(\gamma j)},\ \eta_1^{(\gamma j)})} dJ_i \tag{44}$$

даетъ

$$\xi_{r+1}^{(\gamma j)} = \xi_1^{(\gamma j)}, \quad \eta_{r+1}^{(\gamma j)} = \eta_1^{(\gamma j)} \tag{45}$$

или

$$A_j^{(r+1)} = A_j^{(1)}, \quad B_j^{(r+1)} = B_j^{(1)}; \quad B_{j,\,k}^{(r+1)} = B_{j,\,k}^{(1)}. \tag{46}$$

Обратно условія (46) или (45) предполагаютъ уравненіе (44) или (39), откуда, замѣчая, что

$$\sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\xi_{r+1}^{(\beta j)},\ \eta_{r+1}^{(\beta j)})}^{(\xi_{r+1}^{(\alpha j)},\ \eta_{r+1}^{(\alpha j)})} dJ_i = q' \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\xi_1^{(\beta j)},\ \eta_1^{(\beta j)})}^{(\xi_1^{(\alpha j)},\ \eta_1^{(\alpha j)})} dJ_i \ .$$

получаемъ изъ уравненія (39) уравненія (19).

Итакъ *необходимымъ и достаточнымъ условіемъ интегрируемости въ конечномъ видѣ интеграла J, при условіи, что m не дѣлится на q будетъ періодичность ряда:*

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3 \ldots\ldots \Delta_r,\ \Delta_{r+1} \ldots\ldots,$$

начиная съ перваго члена Δ_1.

Положимъ теперь, что m дѣлится на q, но не представляетъ степени q, такъ что

$$m = q^s n,$$

гдѣ $n > 1$ уже не дѣлится на q, такъ что существуетъ цѣлое число r, удовлетворяющее сравненію

$$q^r \equiv 1 \ (mod. n). \tag{46}$$

Вмѣсто уравненія (39) мы получаемъ

$$\sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\xi_{r+s+1}^{(\beta j)}, \eta_{r+s+1}^{(\beta j)})}^{(\xi_{r+s+1}^{(\alpha j)}, \eta_{r+s+1}^{(\alpha j)})} dJ_i = 2\pi\mu'_i\sqrt{-1} + \sum_{k=1}^{k=p} \lambda'_k \tau_{ki} + q^s \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\xi_1^{(\beta j)}, \eta_1^{(\beta j)})}^{(\xi_1^{(\alpha j)}, \eta_1^{(\alpha j)})} dJ_i \tag{47}$$

а, вмѣсто уравненія (44), слѣдующее:

$$\sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu, \nu)}^{(\xi_{r+s+1}^{(\gamma j)}, \eta_{r+s+1}^{(\gamma j)})} dJ_i = 2\pi\mu'_i\sqrt{-1} + \sum_{k=1}^{k=p} \lambda'_k \tau_{ki} + q^s \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu, \nu)}^{(\xi_1^{(\gamma j)}, \eta_1^{(\gamma j)})} dJ_i \tag{48}$$

или

$$\sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu, \nu)}^{(\xi_{r+s+1}^{(\gamma j)}, \eta_{r+s+1}^{(\gamma j)})} dJ_i = 2\pi\mu'_i\sqrt{-1} + \sum_{k=1}^{k=p} \lambda'_k \tau_{ki} + \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu, \nu)}^{(\xi_{s+1}^{(\gamma j)}, \eta_{s+1}^{(\gamma j)})} dJ_i \tag{49}$$

откуда

$$\xi_{r+s+1}^{(\gamma j)} = \xi_{s+1}^{(\gamma j)}, \quad \eta_{r+s+1}^{(\gamma j)} = \eta_{s+1}^{(\gamma j)} \tag{50}$$

или

$$A_j^{(r+s+1)} = A_j^{(s+1)}, \quad B_j^{(r+s+1)} = B_j^{(s+1)}, \quad B_{j,k}^{(r+s+1)} = B_{j,k}^{(s+1)}. \tag{51}$$

Обратно изъ уравненій (51) приходимъ къ уравненію (19). *Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ интегрируемости* *въ конечномъ видѣ интеграла J, при условіи, что $m=q^s n$ и $n>1$ будетъ періодичность ряда:*

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3 \ldots .\ \Delta_{r-1},\ \Delta_r \ldots .,$$

начиная съ $\overline{s+1}$-го *члена* Δ_{s+1}.

Остается еще разсмотрѣть случай, когда m представляетъ степень q, т. е.

$$m=q^s.$$

Тогда уравненія (39) и (47) замѣняются слѣдующимъ:

$$\sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\xi^{(\beta j)}_{r+1},\ \eta^{(\beta j)}_{r+1})}^{(\xi^{(\alpha j)}_{r+1},\ \eta^{(\alpha j)}_{r+1})} dJ_i = 2\pi\mu'_i\sqrt{-1} + \sum_{k=1}^{k=p} \lambda'_k \tau_{ki}, \tag{52}$$

а уравненія (44) и (49) слѣдующимъ:

$$\sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu,\ \nu)}^{(\xi^{(\gamma j)}_{r+1},\ \eta^{(\gamma j)}_{r+1})} dJ_i = 2\pi\mu'_i\sqrt{-1} + \sum_{k=1}^{k=p} \lambda'_k \tau_{ki}, \tag{53}$$

которое даетъ

$$\xi^{(\gamma j)}_{r+1}=\mu, \quad \eta^{(\gamma j)}_{r+1}=\nu \tag{54}$$

или

$$A_j^{(r+1)}=A_j^{(0)}, \quad B_j^{(r+1)}=B_j^{(0)}, \quad B_{j,\,k}^{(r+1)}=B_{j\ k}^{(0)}, \tag{55}$$

если черезъ $A_j^{(0)}$, $B_j^{(0)}$, $B_{j,\,k}^{(0)}$ обозначать значенія функцій A_j, B_j, $B_{j,\,k}$ при $w_i=0$, черезъ Δ_0 таблицу имъ отвѣчающую.

Обратно, изъ уравненія (53) легко получаемъ (19). *Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ интегрируемости въ конечномъ видѣ интеграла J, при условіи, что $m=q^s$, будетъ совпа-*

деніе одного изъ членовъ ряда:

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3\ \ldots\ldots\ \Delta_{r-1},\ \Delta_r\ldots\ldots$$

съ Δ_0.

Резюмируя, получаемъ слѣдующее:

Необходимое и достаточное условіе интегрируемости въ конечномъ видѣ интеграла J: *Рядъ* $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3\ \ldots\ldots\ \Delta_{r-1},\ \Delta_r$ *долженъ быть, начиная съ нѣкотораго члена періодическимъ или же одинъ изъ членовъ этого ряда долженъ совпадать съ* Δ_0.

§ 4. Когда эти условія интегрируемости выполнены, уравненія (37) даютъ значеніе $\Omega^{(1)}$, а уравненіе (28) выраженіе K или J.

Въ самомъ дѣлѣ, когда m не дѣлится на q, то

$$\Omega^{(1)}=\Omega^{(r+1)}$$

и мы имѣемъ изъ уравненій (37)

$$\Omega^{(1)}=\frac{1}{q^r}\log\prod_{i=1}^{i=r} S^{(i)q^{r-i}}(x^{(1)},\ y^{(1)})+\frac{1}{q^r}\Omega^{(1)},$$

откуда

$$\Omega^{(1)}=\frac{1}{q^r-1}\log\prod_{i=1}^{i=r} S^{(i)q^{r-i}}(x^{(1)},y^{(1)})=\frac{1}{q^r-1}S_{r+1}(x^{(1)},\ y^{(1)}),$$

гдѣ $S_{r+1}(x^{(1)},\ y^{(1)})$ раціональная функція $(x^{(1)},\ y^{(1)})$, а подставляя въ уравненіе (28) получаемъ:

$$K=\frac{1}{q^r-1}\log R^{q^r-1}(x^{(1)},y^{(1)})S_{r+1}(x^{(1)},y^{(1)})=\frac{1}{q^r-1}\log Q(x^{(1)},y^{(1)}), \tag{56}$$

Откуда слѣдуетъ, что можно положить

$$m=q^r-1.$$

Если $m=q^s n$ $(n>1)$, то изъ r послѣднихъ уравненій системы (37) находимъ:

$$\Omega^{(s+1)}=\frac{1}{q^r-1}\log S_{r+s+1}(x^{(1)},\ y^{(1)}),$$

гдѣ $S_{r+s+1}(x^{(1)},y^{(1)})^{q^r-1}$ раціональная функція $(x^{(1)},\ y^{(1)})$, подставляя же s въ первыя уравненія этой системы, имѣемъ:

$$\Omega^{(1)}=\frac{1}{q^s(q^r-1)}\log\left\{\prod_{i=1}^{i=s}S^{(i)q^{s-i}}(x^{(1)},\ y^{(1)})\right\}^{q^r-1}S_{r+s+1}(x^{(1)},\ y^{(1)})$$

и наконецъ:

$$K=\frac{1}{q^s(q^r-1)}\log R^{q^s(q^r-1)}(x^{(1)},\ y^{(1)})\left\{\prod_{i=1}^{i=s}S^{(i)q^{s-i}}(x^{(1)},y^{(1)})\right\}^{q^r-1}\dots$$

$$\dots S_{r+s+1}(x^{(1)},\ y^{(1)})=\frac{1}{q^s(q^r-1)}\log Q(x^{(1)},\ y^{(1)}), \tag{57}$$

откуда

$$m=q^s(q^r-1).$$

Наконецъ при $m=q^r$

$$\Omega^{(r+1)}=1$$

$$\log\Omega^{(r+1)}=0$$

и поэтому на основаніи уравненій (37)

$$\Omega^{(1)}=\frac{1}{q^r}\log\prod_{i=1}^{i=r}S^{(i)q^{r-i}}(x^{(1)},\ y^{(1)})$$

$$K=\frac{1}{q^r}\log R^{q^r}(x^{(1)},\ y^{(1)})\prod_{i=1}^{i=r}S^{(i)q^{r-i}}(x^{(1)},\ y^{(1)})=\frac{1}{q^r}\log Q(x^{(1)},y^{(1)}) \tag{58}$$

откуда

$$m=q^r.$$

Теперь мы покажемъ, какимъ образомъ опредѣляются раціональныя функціи $S^{(t)}(x^{(1)}, y^{(1)})$ и $R^{(t)}(x^{(1)}, y^{(1)})$, входящія въ уравненія (56), (57) и (58).

Съ этой цѣлью мы сперва преобразуемъ выраженія $u_i - M^{(t)}_{i\alpha}$, $u_i - M^{(t)}_{i\beta}$, входящія въ трансцендентное выраженіе для $S^{(t)}(x^{(1)}, y^{(1)})$

$$S^{(t)}(x^{(1)}, y^{(1)}) =$$

$$= \frac{\Theta^q[u_i - M^{(t)}_{i\alpha}]\Theta^q[v_i - M^{(t)}_{i\beta}]\Theta[v_i - M^{(t+1)}_{i\beta}]\Theta[u_i - M^{(t+1)}_{i\beta}]}{\Theta^q[v_i - M^{(t)}_{i\alpha}]\Theta^q[u_i - M^{(t)}_{i\beta}]\Theta[u_i - M^{(t+1)}_{i\beta}]\Theta[v_i - M^{(t+1)}_{i\beta}]} \tag{59}$$

А, именно, уравненія, (7), (8) и (27^t) даютъ:

$$u_i - M^{(t)}_{i\alpha} = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\alpha^{(j)}, \beta^{(j)})}^{(x^{(j)} y^{(j)})} dJ_i - \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu, \nu)}^{(\xi_t^{(\alpha j)}, \eta_t^{(\alpha j)})} dJ_i$$

$$u_i - M^{(t)}_{i\beta} = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\alpha^{(j)}, \beta^{(j)})}^{(x^{(j)}, y^{(j)})} dJ_i - \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu, \nu)}^{(\xi_t^{(\beta j)}, \eta_t^{(\beta j)})} dJ_i$$

или

$$u_i - M^{(t)}_{i\alpha} = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\alpha^{(j)}, \beta^{(j)})}^{(\mu, \nu)} dJ_i + \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu, \nu)}^{(x^{(j)}, y^{(j)})} dJ_i - \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu, \nu)}^{(\xi_t^{(\alpha j)}, \eta_t^{(\alpha j)})} dJ_i$$

$$u_i - M^{(t)}_{i\beta} = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\alpha^{(j)}, \beta^{(j)})}^{(\mu, \nu)} dJ_i + \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu, \nu)}^{(x^{(j)}, y^{(j)})} dJ_i - \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu, \nu)}^{(\xi_t^{(\beta j)}, \eta_t^{(\beta j)})} dJ_i,$$

а по теоремѣ Абеля:

$$u_i - M^{(t)}_{i\alpha} = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\alpha^{(j)}, \beta^{(j)})}^{(\mu, \nu)} dJ_i + \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu, \nu)}^{(x_t^{(\alpha j)}, y_t^{(\alpha j)})} dJ_i = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\alpha^{(j)}, \beta^{(j)})}^{(x_t^{(\alpha j)}, y_t^{(\alpha j)})} dJ_i \tag{60α}$$

$$u_i - M^{(t)}_{i\beta} = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\alpha^{(j)},\, \beta^{(j)})}^{(\mu,\, \nu)} dJ_i + \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\mu,\, \nu)}^{(x_t^{(\beta j)},\, y_t^{(\beta j)})} dJ_i = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\alpha^{(j)},\, \beta^{(j)})}^{(x_t^{(\beta j)},\, y_t^{(\beta j)})} dJ_i \qquad (60\beta)$$

и такимъ же образомъ имѣемъ:

$$v_i - M^{(t)}_{i\alpha} = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\alpha^{(j)},\, \beta^{(j)})}^{(x_{t0}^{(\alpha j)},\, y_{t0}^{(\alpha j)})} dJ_i \qquad (61\alpha)$$

$$v_i - M^{(t)}_{i\beta} = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(\alpha^{(j)},\, \beta^{(j)})}^{(x_{t0}^{(\beta j)},\, y_{t0}^{(\beta j)})} dJ_i \qquad (61\beta)$$

p нулей функціи $\Theta[u_i]$ будутъ:

$$u_i^{(k)} = \int_{(\alpha^{(k)},\, \beta^{(k)})}^{(\mu,\, \nu)} dJ_i + \sum_{j=1}^{j=k-1} \int_{(\alpha^{(j)},\, \beta^{(j)})}^{(x^{(j)},\, y^{(j)})} dJ_i + \sum_{j=k+1}^{j=p} \int_{(\alpha^{(j)},\, \beta^{(j)})}^{(x^{(j)},\, y^{(j)})} dJ_i \qquad (62)$$

$$k = 1,\ 2,\ 3 \ldots\ldots p$$

Поэтому функція $S^{(t)}(x^{(1)}, y^{(1)})$, опредѣляемая формулой (59) будетъ имѣть нули и безконечности кратности q, опредѣляемыя уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} x_t^{(\alpha j)} &= \mu, & y_t^{(\alpha j)} &= \nu; & x_{t0}^{(\beta j)} &= \mu, & y_{t0}^{(\beta j)} &= \nu \\ x_{t0}^{(\alpha j)} &= \mu, & y_{t0}^{(\alpha j)} &= \nu; & x_t^{(\beta j)} &= \mu, & y_t^{(\beta j)} &= \nu \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

и простые нули и безконечности, опредѣляемые уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} x_{t+1}^{(\alpha j)} &= \mu, & y_{t+1}^{(\alpha j)} &= \nu; & x_{t+1,\,0}^{(\beta j)} &= \mu, & y_{t+1,\,0}^{(\beta j)} &= \nu \\ x_{t+1,\,0}^{(\alpha j)} &= \mu, & y_{t+1,\,0}^{(\alpha j)} &= \nu; & x_{t+1}^{(\beta j)} &= \mu, & y_{t+1}^{(\beta j)} &= \nu. \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

Нули и безконечности функціи (59) можно опредѣлить еще уравненіями

$$\prod_{j=1}^{j=p}(x_t^{(\alpha j)}-\mu)=0,\quad \prod_{j=1}^{j=p}(y_t^{(\alpha j)}-\nu)=0, \tag{65}$$

и т. д.

лѣвыя части которыхъ раціональныя симметрическія функціи $x_t^{(\alpha j)}$, $y_t^{(\alpha j)}$ и т. д., а потому также раціональныя симметрическія функціи $(x^{(j)}, y^{(j)})$. Какъ раціональныя симметрическія функціи $(\xi_t^{(\alpha j)}, \eta_t^{(\alpha j)})$, $(\xi_t^{(\beta j)}, \eta_t^{(\beta j)})$ они будутъ раціонально выражаться черезъ $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$ и (ξ, η). Остается только построить $S^{(t)}(x^{(1)}, y^{(1)})$ по заданнымъ нулямъ и полюсамъ.

Предполагаемъ сперва общій случай.

Заданные полюса не принадлежатъ къ такъ называемой спеціальной группѣ полюсовъ, т. е. эти полюса не могутъ всѣ лежать на одной или нѣсколькихъ союзныхъ кривыхъ $\overline{n-3}$ порядка.

Согласно Аппеллю и Гурса [1]) раціональная функція $S^{(t)}(x^{(1)}, y^{(1)})$ можетъ быть слѣдующимъ образомъ построена:

Беремъ двѣ союзныя кривыя:

$$\varphi^{(t)}(x, y)=0 \tag{66}$$

$$\psi^{(t)}(x, y)=0 \tag{67}$$

порядка K при условіи, что K удовлетворяетъ двумъ неравенствамъ:

$$K>n,\quad Kn>2\delta+N, \tag{68}$$

гдѣ $N=qH+G$ сумма порядковъ заданныхъ полюсовъ, а δ число двойныхъ точекъ кривой (2):

$$f(x, y)=0 \tag{2}$$

[1]) *Appell et Goursat.* Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales стр. 581.

или число двойныхъ точекъ, эквивалентныхъ кратнымъ точкамъ кривой (2).

Эти союзныя кривыя (66) и (67) подчиняемъ слѣдующимъ условіямъ:

Кривая $\underline{\varphi^{(t)}(x,\ y)=0}$
проходитъ черезъ простыя полюса $(x^{(g)},\ y^{(g)})$ и имѣетъ соприкосновеніе $\overline{q-1}$ порядка съ кривой (2) въ кратныхъ полюсахъ $(x^{(h)},\ y^{(h)})$.

Коэффиціенты $\varphi^{(t)}(x,\ y)$ должны удовлетворять условіямъ:

$$\varphi^{(t)}(x^{(k)},\ y^{(k)})=0 \tag{69}$$

$$\varphi^{(t)}(x^{(g)},\ y^{(g)})=0, \tag{70}$$

если черезъ $(x^{(k)},\ y^{(k)})$ обозначить двойныя точки кривой.

Уравненія (70) замѣняемъ равносильной имъ системой уравненій:

$$\sum_{g=1}^{g=G} (\vartheta^{(g)})^s \varphi^{(t)}(x^{(g)},\ y^{(g)})=0, \tag{71}$$

$$s=0,\ 1,\ 2\ \ldots .\ \overline{g-1}$$

гдѣ Σ распространена на всѣ полюса $(x^{(g)},\ y^{(g)})$, $\vartheta^{(g)}$ раціональная функція $\vartheta(x^{(g)},\ y^{(g)})$ съ различными значеніями для различныхъ $(x^{(g)},\ y^{(g)})$.

Въ самомъ дѣлѣ при этомъ послѣднемъ условіи опредѣлитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots\ldots & 1 \\ \vartheta^{(1)} & \vartheta^{(2)} & \ldots\ldots\ldots & \vartheta^{(G)} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \vartheta^{(1)^{G-1}} & \vartheta^{(2)^{G-1}} & \ldots\ldots\ldots & \vartheta^{(G)^{G-1}} \end{vmatrix}$$

отличенъ отъ нуля. Такая функція $\vartheta(x^{(g)}, y^{(g)})$ не существуетъ только въ критическомъ случаѣ, когда двѣ или болѣе точки $(x^{(g)}, y^{(g)})$ совпадаютъ; въ этомъ случаѣ условія пересѣченія кривыхъ (2) и (66) слѣдуетъ замѣнить условіями соприкасанія или условіями, что $(x^{(g)}, y^{(g)})$ были бы кратнымъ общимъ рѣшеніемъ уравненій (2) и (66).

Если это рѣшеніе двукратное, то

$$\varphi^{(t)}(x^{(g)}, y^{(g)})=0 \tag{72}$$

$$\frac{\partial(\varphi^{(t)}, f)}{\partial(x^{(g)}, y^{(g)})}=0. \tag{73}$$

Если трехкратное, то слѣдуетъ присоединить еще уравненіе:

$$\frac{\partial(\varphi_1{}^{(t)}, f)}{\partial(x^{(g)}, y^{(g)})}=0, \tag{74}$$

гдѣ $\varphi_1{}^{(t)}$ лѣвая часть уравненія (73) и т. д.

Эти уравненія, какъ выше, легко приводимъ къ уравненіямъ, лѣвыя части которыхъ будутъ симметрическими функціями относительно двукратныхъ рѣшеній $(x^{(g)}, y^{(g)})$ и т. д.

Такъ какъ $(x^{(g)}, y^{(g)})$ опредѣляются уравненіями (65) или

$$\Omega(x^{(1)}, y^{(1)})=0 \tag{75}$$

$$\Theta(x^{(1)}, y^{(1)})=0, \tag{76}$$

лѣвыя части которыхъ будутъ раціональными симметрическими функціями $(x^{(2)}, y^{(2)})(x^{(3)}, y^{(3)})\ldots.(x^{(p)}, y^{(p)})$ и раціональными функціями $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$ и $(\xi\ \eta)$, то таковыми же функціями будутъ раціональныя симметрическія функціи $(x^{(g)}, y^{(g)})$, слѣдовательно и лѣвыя части уравненій (71).

Равнымъ образомъ таковыми же будутъ и коэффиціенты въ уравненіяхъ:

$$A(x^{(1)})=0 \tag{77}$$

$$B(y^{(1)})=0, \tag{78}$$

опредѣляющихъ $x^{(g)}$ и $y^{(g)}$, а также въ уравненіяхъ:

$$A^{(1)}(x^{(1)})=0, \quad A^{(2)}(x^{(1)})=0\ldots.$$

$$B^{(1)}(y^{(1)})=0, \quad B^{(2)}(y^{(1)})=0\ldots.,$$

опредѣляющихъ только простыя рѣшенія $(x^{(g)}, y^{(g)})$, только двукратныя и т. д. Слѣдовательно раціональныя симметрическія функціи простыхъ рѣшеній $(x^{(g)}, y^{(g)})$, двукратныхъ $(x^{(g)}, y^{(g)})$ и т. д. въ частномъ случаѣ лѣвыя части уравненій, къ которымъ приводятся (70) или (72), (73) и т. д. въ указанномъ выше критическомъ случаѣ будутъ раціональными симметрическими функціями $(x^{(j)}, y^{(j)})$ $(j=2, 3 \ldots. p)$ и раціональными функціями $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$ и (ξ, η). Всѣ эти уравненія будутъ кромѣ того линейны относительно неизвѣстныхъ коэффиціентовъ $\varphi^{(t)}(x, y)$.

Точки $(x^{(k)}, y^{(k)})$ будутъ предполагать условія соприкосновенія, аналогичныя (72), (73), (74) и т. д. и тоже будутъ приводиться къ уравненіямъ, лѣвыя части которыхъ будутъ линейны относительно коэффиціентовъ $\varphi^{(t)}(x, y)$, раціональныя симметрическія функціи $(x^{(j)}, y^{(j)})$, $(j=2, 3 \ldots. p)$ и раціональныя функціи $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$, (ξ, η). Условимся называть такія выраженія выраженіями типа (A).

Кривая (66) будетъ встрѣчать кривую (6) еще въ

$$L=Kn-2\delta-N>0$$

точкахъ: $(x^{(i)}, y^{(i)})$.

Лѣвыя части уравненій:

$$C(x)=0 \tag{79}$$

$$D(y)=0, \tag{80}$$

опредѣляющихъ (x, y) для точекъ пересѣченія кривыхъ (66) и (2) будутъ выраженіями типа (A).

Тоже будетъ относиться и къ лѣвымъ частямъ уравненій:

$$\frac{C(x)}{\prod\limits_{g}(x-x^{(g)})\prod\limits_{h}(x-x^{(h)})^{q}}=0 \tag{81}$$

$$\frac{D(y)}{\prod\limits_{g}(y-y^{(g)})\prod\limits_{h}(y-y^{(h)})^{q}}=0, \tag{82}$$

опредѣляющихъ $(x^{(i)}, y^{(i)})$, и ко всякимъ раціональнымъ симметрическимъ функціямъ $(x^{(i)}, y^{(i)})$.

Кривая $\underline{\psi^{(t)}(x, y)=0}$

проходитъ черезъ точки $(x^{(i)}, y^{(i)})$, поэтому

$$\psi^{(t)}(x^{(k)}, y^{(k)})=0 \tag{83}$$

$$\psi^{(t)}(x^{(i)}, y^{(i)})=0 \tag{84}$$

или, если $(x^{(i)}, y^{(i)})$ двукратное рѣшеніе,

$$\psi^{(t)}(x^{(i)}, y^{(i)})=0$$

$$\frac{\partial(\psi^{(t)}, f)}{\partial(x^{(i)}, y^{(i)})}=0 \text{ и т. д.}$$

Кромѣ того $\psi^{(t)}(x, y)=0$ проходитъ черезъ заданные простые нули $(x^{(\gamma)}, y^{(\gamma)})$ и имѣетъ соприкосновеніе $\overline{q-1}$ порядка въ кратныхъ нуляхъ $(x^{(\delta)}, y^{(\delta)})$, такъ что

$$\psi^{(t)}(x^{(\gamma)}, y^{(\gamma)})=0 \tag{85}$$

$$\psi^{(t)}(x^{(\delta)}, y^{(\delta)})=0 \tag{86}$$

$$\frac{\partial(\psi^{(t)}, f)}{\partial(x^{(\delta)}, y^{(\delta)})}=0 \text{ и т. д.}$$

Всѣ эти уравненія приводятся къ уравненіямъ, лѣвыя части которыхъ линейныя функціи коэффиціентовъ $\varphi^{(t)}(x, y)$, раціональныя симметрическія функціи $(x^{(i)}, y^{(i)})$, а потому и $(x^{(j)}, y^{(j)})$ и раціональныя функціи $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$ и (ξ, η), т. е. типа (A).

При этихъ условіяхъ, придавая нѣкоторому числу коэффиціентовъ $\underset{\cdot}{\varphi}^{(t)}(x, y)$ произвольныя значенія, опредѣляемъ остальные коэффиціенты $\underset{\cdot}{\varphi}^{(t)}(x, y)$ и $\underset{\cdot}{\psi}^{(t)}(x, y)$, получаемъ для послѣднихъ выраженія типа (A).

Опредѣливъ $\underset{\cdot}{\varphi}^{(t)}(x, y)$ и $\underset{\cdot}{\psi}^{(t)}(x, y)$ можемъ положить

$$S^{(t)}(x^{(1)}, y^{(1)}) = C^{(t)} \frac{\underset{\cdot}{\psi}^{(t)}(x^{(1)}, y^{(1)})}{\underset{\cdot}{\varphi}^{(t)}(x^{(1)}, y^{(1)})}, \tag{87}$$

гдѣ $C^{(t)}$ не зависитъ отъ $(x^{(1)}, y^{(1)})$, но только отъ $(x^{(j)}, y^{(j)})$, $(j=2, 3 \ldots . p)$.

Совершенно также доказывается этотъ результатъ и въ томъ случаѣ, когда заданные полюса принадлежатъ специальной группѣ.

Въ уравненіи (87) тогда

$$\underset{\cdot}{\varphi}^{(t)}(x, y) = 0 \tag{88}$$

союзная кривая $\overline{n-3}$ порядка, проходящая черезъ заданные простые полюса и имѣющая со кривой (2) соприкосновеніе $\overline{q-1}$-го порядка въ кратныхъ полюсахъ.

Кривая

$$\underset{\cdot}{\psi}^{(t)}(x, y) = 0 \tag{89}$$

союзная кривая $\overline{n-3}$-го порядка, проходящая черезъ точки пересѣченія кривой (88) съ кривой (2) иные, чѣмъ заданные полюсы. Кромѣ того кривая (89) проходитъ черезъ заданные простые нули и соприкасается къ кривой (2) въ кратныхъ нуляхъ. При этихъ условіяхъ намъ остается только повторить приведенныя выше разсужденія для полученія желаемаго результата.

Теперь переходимъ къ функціи:

$$R(x^{(1)},\ y^{(1)})=$$

$$=\frac{\prod\limits_{k=1}^{k=p}\Theta^{n_k}[u_i-M_{ik}]\Theta^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}n_k}[v_i^{(0)}-M_i]\Theta[v_i-M^{(1)}_{i\alpha}]\Theta[u_i-M^{(1)}_{i\beta}]}{\prod\limits_{k=1}^{k=p}\Theta^{n_k}[v_i^{(0)}-M_{ik}]\Theta^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}n_k}[u_i-M_i]\Theta[u_i-M^{(1)}_{i\alpha}]\Theta[v_i-M^{(1)}_{i\beta}]}.$$

Опредѣленіе $R(x^{(1)},\ y^{(1)})$ тоже приводится къ построенію ея по заданнымъ полюсамъ и нулямъ. А именно, эта функція должна имѣть полюсъ $(\xi,\ \eta)$ порядка $\sum\limits_{k=1}^{k=p}n_k$, простые полюса, опредѣляемыя уравненіями:

$$x_1^{(\alpha j)}=\mu,\quad y_1^{(\alpha j)}=\nu;\quad x_{1,\,0}^{(\beta j)}=\mu,\quad y_{1,\,0}^{(\beta j)}=\nu,$$

нули: $(\xi^{(k)},\ \eta^{(k)})$ порядковъ n_k, простые нули, опредѣляемые уравненіями:

$$x_{1,\,0}^{(\alpha j)}=\mu,\quad y_{1,\,0}^{(\alpha j)}=\nu;\quad x_1^{(\beta j)}=\mu,\quad x_1^{(\beta j)}=\nu$$

и мы получаемъ:

$$R(x^{(1)},\ y^{(1)})=D\frac{\chi(x^{(1)},\ y^{(1)})}{\omega(x^{(1)},\ y^{(1)})},\tag{90}$$

гдѣ $\chi(x^{(1)}, y^{(1)})$, $\omega(x^{(1)}, y^{(1)})$ раціональныя симметрическія функціи $(x^{(j)}, y^{(j)})$ $(j=2,\ 3\ \ldots.\ p)$ и раціональныя функціи $(\xi^{(k)},\ \eta^{(k)})$, $(\xi,\ \eta)$. D не зависитъ отъ $(x^{(1)},\ y^{(1)})$.

Легко теперь видѣть, что мы можемъ пользоваться уравненіями (56), (57) и (58), полагая

$$S^{(t)}(x^{(1)},\ y^{(1)})=\frac{\varphi^{(t)}(a,\ b)}{\psi^{(t)}(a,\ b)}\ \frac{\psi^{(t)}(x^{(1)},\ y^{(1)})}{\varphi^{(t)}(x^{(1)},\ y^{(1)})},\tag{91}$$

$$R(x^{(1)},\ y^{(1)})=\frac{\omega(a,\ b)}{\chi(a,\ b)}\ \frac{\chi(x^{(1)}\ y^{(1)})}{\omega(x^{(1)}\ y^{(1)})},\tag{92}$$

гдѣ $(a,\ b)$ постоянныя значенія $(x,\ y)$.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$S^{(t)}(x^{(1)}, y^{(1)}) = E^{(t)} \frac{\varphi^{(t)}(a, b)}{\psi^{(t)}(a, b)} \quad \frac{\psi(x^{(1)}, y^{(1)})}{\varphi(x^{(1)} y^{(1)})}$$

$$R(x^{(1)}, y^{(1)}) = F \frac{\omega(a, b)}{\chi(a, b)} \quad \frac{\chi(x^{(1)}, y^{(1)})}{\omega(x^{(1)}, y^{(1)})},$$

такъ что

$$C^{(t)} = E^{(t)} \frac{\varphi^{(t)}(a\ b)}{\psi^{(t)}(a\ b)}$$

$$D = F \frac{\omega(a, b)}{\psi(a, b)},$$

находимъ, на основаніи уравненій (56), (57) и (58):

$$K = \frac{1}{q^r - 1} \log R^{q^r - 1}(x^{(1)}, y^{(1)}) S_{r+1}(x^{(1)}, y^{(1)}) + \\ + \frac{1}{q^r - 1} \log F^{q^r - 1} E_{r+1} \tag{93}$$

и два другихъ, отвѣчающихъ (57) и (58), гдѣ

$$S_{r+1}(x^{(1)}, y^{(1)}) = \prod_{t=1}^{t=r} S^{(t)^{q^r - 1}}(x^{(1)}, y^{(1)})$$

и гдѣ $R(x^{(1)}, y^{(1)})$ и $S^{(t)}(x^{(1)}, y^{(1)})$ имѣютъ значенія, опредѣляемыя уравненіями (91) и (92), K не зависитъ отъ $(x^{(j)}, y^{(j)})$ $(j=2, 3 \ldots . p)$.

При $(x^{(1)}=a, y^{(1)}=b)$ первый членъ второй части уравненія (93) приводится къ нулю, K къ постоянному, поэтому и $\frac{1}{q^r - 1} \log F^{q^r - 1} E_{r+1}$ должно быть постояннымъ. При $(a=x^{(10)}$ $b=y^{(10)})$ K приводится къ нулю и мы имѣемъ

$$\frac{1}{q^r - 1} \log F^{q^r - 1} E_{r+1} = 0,$$

т. е. получаемъ уравненіе (56), но гдѣ $R(x^{(1)}, y^{(1)})$ и $S^{(t)}(x^{(1)}, y^{(1)})$ имѣютъ уже значенія (91) и (92). Также разсматриваются и случаи уравненій (57) и (58).

Такимъ образомъ *не только разысканіе необходимыхъ и достаточныхъ условій интегрируемости, но и разысканіе самаго выраженія K въ конечномъ видѣ, если это выраженіе возможно, не требуетъ рѣшенія уравненій высшихъ степеней, но только системы уравненій первой степени.*

§ 5. Останавливаясь подробнѣе на случаѣ ультраэллиптическихъ интеграловъ [1]), мы покажемъ, какимъ образомъ могутъ примѣняться къ интегрированію въ конечномъ видѣ тета-функціи отъ многихъ аргументовъ. Основное предложеніе, которымъ мы пользовались, начиная съ § 1, можетъ быть для этого случая слѣдующимъ образомъ формулировано:

Задача объ интегрированіи въ конечномъ видѣ ультраэллиптическихъ интеграловъ приводится къ задачѣ о выраженіи интеграла:

$$J=\sum_{k=1}^{k=p} n_k \Pi_{\xi_k}\,, \tag{94}$$

гдѣ

$$\Pi\xi_k=\int \frac{\sqrt{R(\xi_k)}}{P(\xi_k)}\,\frac{P(x)}{x-\xi_k}\,\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} \tag{95}$$

$$R(x)=\prod_{i=0}^{i=2p}(x-a_i) \tag{96}$$

$$P(x)=\prod_{i=0}^{i=p}(x-a_{2i+1}) \tag{97}$$

$$Q(x)=\prod_{i=0}^{i=p}(x-a_{2i})$$

---

[1]) Случай ультраэллиптическихъ интеграловъ перваго класса будетъ подробно разобранъ въ другой работѣ. Вслѣдствіе недостаточной разработки теоріи ультраэллиптическихъ функцій высшихъ классовъ мы можемъ излагать методу лишь въ общихъ чертахъ.

n_k цѣлыя числа, въ формѣ:

$$\frac{1}{m}\log Q(x,\,y)-\sum_{i=1}^{i=p} A_i F_i, \tag{98}$$

гдѣ

$$F_i=\int \frac{P(x)}{x-a_{2i+1}}\,\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} \tag{99}$$

интегралы перваго рода, m цѣлое число, $Q(x,\,y)$ раціональная функція.

Въ разбираемомъ частномъ случаѣ [1]), вмѣсто формулы (12) удобнѣе брать слѣдующую [2]):

$$\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(a_{2j-1},\,b_{2j-1})}^{(x^{(j)},\,y^{(j)})} d\Pi_{\xi}=\sum_{i=1}^{i=p} C_i\int_{(a_{2j-1},\,b_{2j-1})}^{(x^{(j)},\,y^{(j)})} dF_i+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta[u_i+M_i]}{\Theta[u_i-M_i]}, \tag{100}$$

гдѣ

$$u_i=\sum_{j=1}^{j=p}\int_{a_{2j-1},\,b_{2j-1}}^{(x^{(j)},\,y^{(j)})} dJ_i \tag{101}$$

$$M_i=\int_{\infty}^{(\xi,\,\eta)} dJ_i \tag{102}$$

и гдѣ J_i интегралы перваго рода съ періодами опредѣляемыми таблицей (9).

---

[1]) Въ этомъ параграфѣ мы будемъ пользоваться формулами, помѣщенными въ знаменитыхъ мемуарахъ Вейерштрасса: „Theorie der Abelschen Functionen" Journal de Crelle B. 52 или Werke B. I. S. 300 и „Zur Theorie der Abelschen Functionen" Journal de Crelle B. 47. Werke B. I. S. 133.

[2]) Въ такомъ видѣ эта формула дается у *М. А. Тихомандрицкаго* Обращеніе гиперэллиптическихъ интеграловъ. стр. 103, формула (12).

Изъ уравненія (100) получаемъ для интеграла:

$$K=J+\sum_{i=1}^{i=p}A_i\int\limits_{(x^{(10)},\,y^{(10)})}^{((x^{j)},\,y^{(j)})}dF_i=\int\limits_{(x^{(10)},\,y^{(10)})}^{(x^{(j)},\,y^{(j)})}\left[\sum_{i=0}^{i=p-1}G_ix^i+\sum_{k=1}^{k=p}\frac{n_k\sqrt{R(\xi_k)}}{x-\xi_k}\right]\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}$$

слѣдующее выраженіе:

$$K=\frac{1}{2}\log\frac{\prod\limits_{k=1}^{k=p}\Theta^{n_k}[u_i+M_{ik}]}{\prod\limits_{k=1}^{k=p}\Theta^{n_k}[u_i-M_{ik}]}+\sum_{i=1}^{i=p}A^{(i)}F_i, \tag{103}$$

гдѣ

$$M_{ik}=\int\limits_{\infty}^{(\xi_k,\,\eta_k)}dJ_i\,. \tag{104}$$

Обозначая черезъ

$$2K_{i,\,1},\qquad 2K_{i,\,2},\;\ldots\ldots\ldots\; 2K_{i,\,p}$$

$$2K'_{i,\,1}\sqrt{-1},\;\; 2K'_{i,\,2}\sqrt{-1},\;\;\ldots\; 2K'_{i,\,p}\sqrt{-1}$$

систему періодовъ интеграла F_i, такъ что

$$F_i=\frac{\sum\limits_{j=1}^{j=p}K_{i,\,j}\,J_j}{\pi\sqrt{-1}} \tag{105}$$

мы можемъ условіе интегрируемости (19), выведенное для общаго случая Абелевыхъ интеграловъ замѣнить слѣдующимъ

$$\sum_{k=1}^{k=p}n_k\int\limits_{\infty}^{(\xi_k,\,\eta_k)}dF_i=\frac{\sum\limits_{j=1}^{j=p}2\lambda_iK_{i,\,j}+\sum\limits_{j=1}^{j=2}2\lambda'_jK'_{i,\,j}\sqrt{-1}}{m} \tag{106}$$

гдѣ λ_j, λ'_j цѣлыя числа.

При помощи разсужденій, аналогичныхъ помѣщеннымъ въ § 3, убѣждаемся въ слѣдующемъ.

Полагая:

$$\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(a_{2j-1},\, b_{2j-1})}^{(\xi_1^{(\alpha j)},\, \eta_1^{(\alpha j)})} dF_i = \sum_{k=1}^{k=p} n_k \int_{\infty}^{(\xi_k,\, \eta_k)} dF_i \tag{107}$$

$$w_i^{(\alpha t)} = \sum_{j=1}^{j=p}\int_{(a_{2j-1},\, b_{2j-1})}^{(\xi_t^{(\alpha j)},\, \eta_t^{(\alpha j)})} dF_i = q\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(a_{2j-1},\, b_{2j-1})}^{(\xi_{t-1}^{(\alpha j)},\, \eta_{t-1}^{(\alpha j)})} dF_i = \ldots = q^{t-1}\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(a_{2j-1},\, b_{2j-1})}^{(\xi_1^{(\alpha j)},\, \eta_1^{(\alpha j)})} dF_i \tag{108}$$

$$w_i^{(t)} = 2\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(a_{2j-1},\, b_{2j-1})}^{(\xi_t^{(\alpha j)},\, \eta_t^{(\alpha j)})} dF_i = \sum_{j=1}^{j=p}\int_{(a_{2j-1},\, b_{2j-1})}^{(\xi_t^{(\gamma j)},\, \eta_t^{(\gamma j)})} dF_i \tag{109}$$

мы получаемъ слѣдующее условіе интегрируемости. Когда m не дѣлится на q:

$$\xi_{r+1}^{(\gamma j)} = \xi_1^{(\gamma j)},\quad \eta_{r+1}^{(\gamma j)} = \eta_1^{(\gamma j)},\quad \text{если } q^r \equiv 1\ (mod.m) \tag{110}$$

При $m = q^s n$:

$$\xi_{r+s+1}^{(\gamma j)} = \xi_{s+1}^{(\gamma j)},\quad \eta_{r+s+1}^{(\gamma j)} = \eta_{s+1}^{(\gamma j)},\quad \text{если } q^r \equiv 1\ (mod.n.). \tag{111}$$

При $m = q^r$:

$$\xi_{r+1}^{(\gamma j)} = a_{2j-1},\quad \eta_{r+1}^{(\gamma j)} = \sqrt{R(a_{2j-1})}. \tag{112}$$

На основаніи формулъ [1]) опредѣляющихъ Вейерштрассовы функціи:

[1]) Мы беремъ всѣ эти формулы въ томъ видѣ, въ какомъ ихъ даетъ Вейерштрассъ въ упомянутой выше статьѣ. Функція $al[v_i]_\alpha$ чаще опредѣляется формулой $al[v_i]_\alpha = \dfrac{\sqrt{(-1)^{E\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\varphi(a_\alpha)}}{\sqrt[4]{(-1)^\alpha Q(a_\alpha)}}$; формулы (113), (116), (117), (118) и (119) помѣщены въ статьѣ Вейерштрасса подъ номерами: (VII), (XX), (IX), (III) и (X). У Покровскаго тѣже формулы подъ номерами: (73), (101), (78), (79) и (80) (*П. М. Покровскій.* Теорія ультра-эллиптическихъ функцій I класса. „Математическій Сборникъ", т. XIII, стр. 174).

$$al[v_i]_\alpha = \frac{\sqrt{\varphi(a_\alpha)}}{\sqrt{(-1)^\alpha Q(a_\alpha)}} \tag{113}$$

$$Q(\xi) = \prod_{i=0}^{i=p} (\xi - a_{2i})$$

$$\varphi(\xi) = \prod_{i=1}^{i=p} (\xi - \xi_i) \tag{114}$$

$$v_i = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(a_{2j-1},\ b_{2j-1})}^{(\xi_j,\ \eta_j)} dF_i \tag{115}$$

$$\frac{\overline{al}[v_i]_\alpha}{al[v_i]_\alpha} = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\sqrt{R(\xi_k)}}{(\xi_k - a_\alpha)\varphi'(\xi_k)}, \tag{116}$$

гдѣ

$$\overline{al}[v_i]_\alpha = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\partial al[v_i]_\alpha}{\partial v_k}, \tag{117}$$

дающихъ $al^2[v_i]_{2s-1}$, $\dfrac{al[v_i]_{2s-1}}{\overline{al}[v_i]_{2s-1}}$ въ раціональныхъ функціяхъ отъ ξ_k, η_k и уравненій:

уравненія степени p, опредѣляющаго $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$

$$\sum_{s=1}^{s=p} \frac{Q(a_{2s-1})}{P'(a_{2s-1})} \frac{al^2[v_i]_{2s-1}}{\xi - a_{2s-1}} = 0, \tag{118}$$

дающаго раціональныя симметрическія функціи $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$ **раціонально въ** $al^2[v_i]_{2s-1}$, **и уравненій**

$$\eta_k = -\sum_{s=1}^{s=p} \frac{P(\xi_k)}{a_{2s-1} - \xi_k} \frac{Q(a_{2s-1})}{P'(a_{2s-1})} al^2[v_i]_{2s-1} \frac{\overline{al}[v_i]_{2s-1}}{al[v_i]_{2s-1}}, \tag{119}$$

опредѣляющихъ η_k въ раціональныхъ функціяхъ отъ

$$\xi_k,\ al^2[v_i]_{2s-1},\ \frac{al[v_i]_{2s-1}}{\overline{al}[v_i]_{2s-1}}$$

мы можемъ замѣнить доказанныя выше условія слѣдующими:

Рядъ $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3 \ldots\ldots \Delta_{r-1},\ \Delta_r \ldots\ldots$ *гдѣ* Δ_r *опредѣляется таблицей:*

$$\left|\begin{matrix} al^2[w_i^{(r)}]_1, & al^2[w_i^{(r)}]_3 \ldots\ldots & al^2[w_i^{(r)}]_{2p-1} \\ \dfrac{al[w_i^{(r)}]_1}{\overline{al}[w_i^{(r)}]_1}, & \dfrac{al[w_i^{(r)}]_3}{\overline{al}[w_i^{(r)}]_1} \ldots\ldots & \dfrac{al[w_i^{(r)}]_{2p-1}}{\overline{al}[w_i^{(r)}]_{2p-1}} \end{matrix}\right| \quad (\Delta_r)$$

долженъ быть, начиная съ нѣкотораго члена, періодическимъ или одинъ изъ членовъ этого ряда долженъ быть:

$$\left|\begin{matrix} al^2[0]_1, & al^2[0]_3 \ldots\ldots & al^2[0]_{2p-1} \\ \dfrac{al[0]_1}{\overline{al}[0]_1}, & \dfrac{al[0]_3}{\overline{al}[0]_3} \ldots\ldots & \dfrac{al[0]_{2p-1}}{\overline{al}[0]_{2p-1}} \end{matrix}\right| \quad (\Delta_0)$$

т. е.

$$\left|\begin{matrix} 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \end{matrix}\right| \quad (\Delta_0)$$

Въ самомъ дѣлѣ при условіяхъ (110) уравненія (113) и (116) даютъ:

$$al^2[w_i^{(r+1)}]_\alpha = al^2[w_i^{(1)}]_\alpha,\quad \frac{al[w_i^{(r+1)}]_\alpha}{\overline{al}[w_i^{(r+1)}]_\alpha} = \frac{al[w_i^{(1)}]_\alpha}{\overline{al}[w_i^{(1)}]_\alpha} \tag{120}$$

при условіяхъ (111):

$$al^2[w_i^{(r+s+1)}]_\alpha = al^2[w_i^{(s+1)}]_\alpha,\quad \frac{al[w_i^{(r+s+1)}]_\alpha}{\overline{al}[w_i^{(r+s+1)}]_\alpha} = \frac{al[w_i^{(s+1)}]_\alpha}{\overline{al}[w_i^{(s+1)}]_\alpha} \tag{121}$$

при (112):

$$al^2[w_i^{(r+1)})_\alpha = al^2[0]_\alpha,\quad \frac{al[w_i^{(r+1)}]_\alpha}{\overline{al}[w_i^{(r+1)})_\alpha} = \frac{al[0]_\alpha}{\overline{al}[0]_\alpha}. \tag{122}$$

Обратно уравненіе (118) при условіяхъ (120) даетъ двѣ одинаковыя системы величинъ $\xi_{r+1}^{(\eta)}$ и $\xi_{1}^{(\eta)}$ или условіе $\xi_{r+1}^{(\eta)}=\xi_{1}^{(\eta)}$, на основаніи уравненія (119) должны кромѣ того имѣть

$$\eta_{r+1}^{(\eta)}=\eta_{1}^{(\eta)},$$

т. е. условія (120) предполагаютъ (110). Такимъ же образомъ изъ условій (121) и (122) вытекаютъ (111) и (112).

Остается теперь показать, какимъ образомъ могутъ быть опредѣлены члены ряда: Δ_1, Δ_2, ... Δ_ν....

Замѣтимъ прежде всего, что формулы сложенія тета-функцій даютъ намъ формулы сложенія функціи $al[v_i]_\alpha$ (опредѣленныхъ формулой (113)) и функцій

$$al[v_i]_{\alpha\beta}=-\sum_{k=1}^{k=p}\frac{al[v_i]_\alpha al[v_i]_\beta\sqrt{R(\xi_k)}}{(a_\alpha-\xi_k)(a_\beta-\xi_k)\varphi'(\xi_k)}, \tag{123}$$

т. е. раціональныя выраженія функцій

$$al\left[\sum_{h=1}^{h=m}v_i^{(h)}\right]_\alpha,\quad al\left[\sum_{h=1}^{h=m}v_i^{(h)}\right]_{\alpha\beta}$$

черезъ $al[v_i^{(h)}]_\alpha$, $al[v_i^{(h)}]_{\alpha\beta}$, откуда имѣя въ виду выраженія $al[v_i]_{\alpha\beta}$ черезъ $al[v_i]_\alpha$ и обратно: по формуламъ Вейерштрасса [19]):

$$al[v_i]_{\alpha\beta}=\frac{al[v_i]\overline{al}[v_i]_\beta-al[v_i]_\beta\overline{al}[v_i]_\alpha}{a_\alpha-a_\beta} \tag{124}$$

[19]) Мы позволяемъ себѣ не выписывать подробно всѣ эти формулы, отсылая читателя къ упомянутому выше мемуару Вейерштрасса см. § 5, стр. 336 формулы (9) или Покровскій — § 28 стр. 215 формулы (133—144).

$$\frac{\partial al[v_i]_{2s-1}}{\partial v_{2s-1}} = -\sum_{s=1}^{s=p} \frac{Q(a_{2s-1})}{P'(a_{2s-1})} al[v_i]_{2s-1} al[v_i]_{2s-1,\ 2r-1},$$

и другимъ для $\frac{\partial al[v_i]_{2s}}{\partial v_{2r-1}}$, $\frac{\partial al[v_i]_{2s-1}}{\partial v_{2r}}$, $\frac{\partial al[v_i]_{2s}}{\partial v_{2r}}$, $\frac{\partial al[v_i]_{2s-1}}{\partial v_{2s-1}}$ и $\frac{\partial al[v_i]_{2s}}{\partial v_{2s}}$ получаемъ подобныя же формулы сложенія для функцій

$$al^2[v_i]_\alpha,\ \frac{al[v_i]_\alpha}{\overline{al}[v_i]_\alpha}.$$

Эти формулы даютъ возможность при помощи раціональныхъ дѣйствій переходить отъ одной таблицы Δ_i къ слѣдующей Δ_{i+1}, а равнымъ образомъ отъ функцій:

$$al^2[w_i]_\alpha, \frac{al[w_i]_\alpha}{\overline{al}[w_i]_\alpha},\ \text{гдѣ}\ w_i = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(a_{2j-1},\ b_{2j-1})}^{(\xi_1^{(\alpha j)},\ \eta_1^{(\alpha j)})} dF_i$$

къ

$$al^2[w_i^{(1)}]_\alpha,\ \frac{al[w_i^{(1)}]_\alpha}{\overline{al}[w_i^{(1)}]_\alpha},\ \text{гдѣ}\ w_i^{(1)} = 2\sum_{j=1}^{j=p} \int_{(a_{2j-1},\ b_{2j-1})}^{(\xi_1^{(\alpha j)},\ \eta_1^{(\alpha j)})} dF_i = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(a_{2j-1},\ b_{2j-1})}^{(\xi_1^{(\gamma j)},\ \eta_1^{(\gamma j)})} dF_i\,.$$

Функціи же $al^2[w_i)_\alpha$, $\frac{al[w_i]_\alpha}{\overline{al}[w_i]_\alpha}$ въ свою очередь раціонально выражаются черезъ $\overline{al}^2[p_i^{(k)}]_\alpha$, $\frac{al[p_i^{(k)}]_\alpha}{\overline{al}[p_i^{(k)}]_\alpha}$, гдѣ

$$p_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{\infty}^{(\xi_j^{(k)},\ \eta_j^{(k)})} dF_i, \quad \text{гдѣ}\ \xi_k^{(k)} = \xi_k,\ \eta_k^{(k)} = \eta_k$$

$$\xi_j^{(k)} = \infty \qquad (j \lessgtr k)$$

на основаніи уравненія (107).

Представляя p_i въ слѣдующемъ видѣ:

$$p_i^{(k)}=\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(a_{2j-1},\ b_{2j-1})}^{(\xi_j^{(k)},\ \eta_j^{(k)})} dF_i-\overset{k}{K}_i, \tag{126}$$

гдѣ

$$\xi_k^{(k)}=\xi_k, \qquad \eta_k^{(k)}=\eta_k$$

$$\xi_j^{(k)}=a_{2j-1}, \quad \eta_j^{(k)}=b_{2j-1} \qquad (k \gtrless j)$$

$$\overset{k}{K}_i=\int_{(a_{2k-1},\ b_{2k-1})}^{\infty} dF_i \tag{127}$$

мы можемъ при помощи формулъ Вейерштрасса[1]), дающихъ $al[v_i+\overset{\alpha}{K}_1]_x$, $al[v_i+\overset{\beta}{K}_i]_x$, $\overline{al}[v_i+\overset{\alpha}{K}_1]_x$, $\overline{al}[v_i+\overset{\beta}{K}_i]_x$ черезъ $al[v_i]_x$, $\overline{al}[v_i]_x$, найти раціональныя выраженія $al^2[p_i^{(k)}]_x$, $\dfrac{al[p_i^{(k)}]_x}{\overline{al}[p_i^{(k)}]_x}$ въ $fal^2[q_i^{(k)}]_x$ и $\dfrac{al\,[q_i^{(k)}]_x}{\overline{al}\,[q_i^{(k)}]_x}$, гдѣ

$$q_i^{(k)}=\sum_{j=1}^{j=p}\int_{(a_{2j-1},\ b_{2j-1})}^{(\xi_j^{(k)},\ \eta_j^{(k)})} dF_i, \tag{128}$$

а послѣднія на основаніи формулъ (113), (116) раціонально выразить черезъ (ξ_k, η_k).

§ 6. Формулы преобразованія K будутъ въ настоящемъ случаѣ слѣдующія:

---

[1]) Эти формулы даются въ мемуарѣ: „Zur Theorie der Abelschen xunctionen". S. 139 формулы (16) и (17). Покровскій—стр. 212.

$$
\begin{aligned}
K \quad &= \frac{1}{2}\log R(x^{(1)},\ y^{(1)}) + \Omega^{(1)} \\
\Omega^{(1)} &= \frac{1}{q}\log S^{(1)}(x^{(1)},\ y^{(1)}) + \frac{1}{q}\,\Omega^{(2)} \\
\Omega^{(2)} &= \frac{1}{q}\log S^{(2)}(x^{(1)},\ y^{(1)}) + \frac{1}{q}\,\Omega^{(3)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Omega^{(r-1)} &= \frac{1}{q}\log S^{(r-1)}(x^{(1)},\ y^{(1)}) + \frac{1}{q}\,\Omega^{(r)} \\
\Omega^{(r)} &= \frac{1}{q}\log S^{(r)}(x^{(1)},\ y^{(1)}) + \frac{1}{q}\,\Omega^{(r-1)},
\end{aligned}
\tag{129}
$$

гдѣ

$$
R(x^{(1)},\ y^{(1)}) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{k=p} \Theta^{n_k}[u_i + M_{ik}]\,\Theta^2[u_i - \sum\limits_{k=1}^{k=p} n_k M_{ik}]}{\prod\limits_{k=1}^{k=p} \Theta^{n_k}[u_i - M_{ik}]\,\Theta^2[u_i + \sum\limits_{k=1}^{k=p} n_k M_{ik}]}
\tag{130}
$$

$$
S^{(t)}(x^{(1)},\ y^{(1)}) = \frac{\Theta^q[u_i + M_i^{(t)}]\,\Theta[u_i - qM_i^{(t)}]}{\Theta^q[u_i - M_i^{(t)}]\,\Theta[u_i + qM_i^{(t)}]}
\tag{131}
$$

$$
M_i^{(t)} = \sum_{j=1}^{j=p} \int_{(a_{2j-1},\ b_{2j-1})}^{(\xi_t^{(\alpha j)},\ \eta_t^{(\alpha j)})} dJ_i = q\sum_{j=1}^{j=p} \int_{(a_{2j-1},\ b_{2j-1})}^{(\xi_{t-1}^{(\alpha j)},\ \eta_{t-1}^{(\alpha j)})} dJ_i = \ldots = q^{t-1}\sum_{j=1}^{j=p} \int_{(a_{2j-1},\ b_{2j-1})}^{(\xi_1^{(\alpha j)},\ \eta_1^{(\alpha j)})} dJ_i.
\tag{132}
$$

Вычисленіе $S_q^{(t)} = S^{(t)}(x^{(1)},\ y^{(1)})$ мы можемъ сводить къ вычисленію $S_{q-1}^{(t)}$ по формулѣ:

$$
S_q^{(t)} = F_{q-1}^{(t)} \cdot \frac{S_{q-1}^{(t)2}}{S_{q-2}^{(t)}},
\tag{133}
$$

гдѣ

$$F^{(t)}_{q-1}=\frac{G^{(t)}_{q-1}}{H^{(t)}_{q-1}} \tag{134}$$

$$H^{(t)}_{q-1}=\frac{\Theta[u_i+(q-1)M_i^{(t)}+M_i^{(t)}]\Theta[u_i+(q-1)M_i^{(t)}-M_i^{(t)}]}{\Theta^2[u_i+(q-1)M_i^{(t)}]\Theta^2[M_i^{(t)}]} \tag{135}$$

$$G^{(t)}_{q-1}=\frac{\Theta[u_i-(q-1)M_i^{(t)}-M_i^{(t)}]\Theta[u_i-(q-1)M_i^{(t)}+M_i^{(t)}]}{\Theta^2[u_i-(q-1)M_i^{(t)}]\Theta^2[M_i^{(t)}]}. \tag{136}$$

Числитель $H^{(t)}_{q-1}$ на основаніи формулъ сложенія тета-функцій 1) выражается суммой

$$\sum_{r,s,u,v} H_{r,s,u,v}\Theta\begin{bmatrix}g_r\\ h_r\end{bmatrix}\left[u_i+(q-1)M_i^{(t)}\right]\Theta\begin{bmatrix}g_s\\ h_s\end{bmatrix}\left[u_i+(q-1)M_i^{(t)}\right]$$

$$\Theta\begin{bmatrix}g_u\\ h_u\end{bmatrix}\left[M_i^{(t)}\right]\Theta\begin{bmatrix}g_v\\ h_v\end{bmatrix}\left[M_i^{(t)}\right],$$

гдѣ $H_{r,s,u,v}$ не зависятъ отъ u_i и $M_i^{(t)}$. Поэтому $H^{(t)}_{q-1}$ выразится раціонально въ

$$\frac{\Theta\begin{bmatrix}g_r\\ h_r\end{bmatrix}\left[u_i+(q-1)M_i^{(t)}\right]}{\Theta\begin{bmatrix}g_s\\ h_s\end{bmatrix}\left[u_i+(q-1(M_i^{(t)}\right]} \quad \text{и} \quad \frac{\Theta\begin{bmatrix}g_r\\ h_r\end{bmatrix}\left[M_i^{(t)}\right]}{\Theta\begin{bmatrix}g_s\\ h_s\end{bmatrix}\left[M_i^{(t)}\right]} \tag{137}$$

или, что тоже въ

$$al^2[v_i+(q-1)w_i^{(\alpha t)}]_\alpha,\ \frac{al[v_i+(q-1)w_i^{(\alpha t)}]}{\overline{al}[v_i+(q-1)w_i^{(\alpha t)}]}$$

и

$$al^2[w_i^{(\alpha t)}]_\alpha,\ \frac{al[w_i^{(\alpha t)}]_\alpha}{\overline{al}[w_i^{(\alpha t)}]_\alpha},$$

---

1) *Krazer*. Lehrbuch der Thetafunctionen. Формула сложенія тета-функцій см. стр. 350. Эти формулы даются Кенигсбергеромъ въ его извѣстномъ мемуарѣ. Journal de Crelle. B. 64, также у *Krause*. Die Transformation der hyperelliptischen Functionen. S. 42.

а эти послѣднія на основаніи формулъ сложенія ультраэллиптическихъ функцій выражаются раціонально въ

$$al^2[v_i]_\alpha,\ \frac{al[v_i]_\alpha}{\overline{al}[v_i]_\alpha}$$

и

$$al^2[w_i^{(\alpha t)}]_\alpha\ \frac{al[w_i^{(\alpha t)}]_\alpha}{\overline{al}[w_i^{(\alpha t)}]_\alpha},$$

а на основаніи уравненія (131) или (108) и формулы сложенія выражаются раціонально въ $(x^{(j)}, y^{(j)})$ и (ξ_k, η_k). Такимъ же образомъ вычисляется G^t_{q-1}.

Имѣя послѣдовательно

$$
\begin{aligned}
S^{(t)}_{q-1} &= F^{(t)}_{q-2}\ \frac{S^{(t)^2}_{q-2}}{S^{(t)}_{q-3}} \\
S^{(t)}_{q-2} &= F^{(t)}_{q-3}\ \frac{S^{(t)^2}_{q-3}}{S^{(t)}_{q-4}} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (138) \\
S^{(t)}_{3} &= F^{(t)}_{2}\ \frac{S^{(t)2}_{2}}{S^{(t)}_{1}} \\
S^{(t)}_{2} &= F^{(t)}_{1} \\
S^{(t)}_{1} &= 1
\end{aligned}
$$

мы будемъ постепенно вычислять

$$S^{(t)}_1,\quad S^{(t)}_2,\quad S^{(t)}_3 \dots\dots S^{(t)}_{q-1} \text{ до } S^{(t)}_q.$$

Такимъ же образомъ идетъ вычисленіе

$$R(x^{(1)}, y^{(1)}) = R_{n_1, n_2 \dots n_p}$$

при помощи формулы приведенія

$$R n_1, n_2 \dots n_{h-1}, n_h, n_{h+1} \dots n_p =$$

$$= C n_1, n_2 \dots n_{h-1}, n_h - 1, n_{h+1} \dots n_p \frac{R^2 n_1, n_2 \dots n_{h-1}, n_h - 1, n_{h-1} \dots n_p}{R n_1, n_2 \dots n_{h-1}, n_h - 2, n_{h-1} \dots n_p},$$

гдѣ

$$C n_1, n_2 \dots n_{h-1}, n_h - 1, n_{h+1} \dots n_p = \frac{A n_1, n_2 \dots n_{h-1}, n_h - 1, n_{h+1} \dots n_p}{B n_1, n_2 \dots n_{h-1}, n_h - 1, n_{h+1} \dots n_p}$$

$$A n_1, n_2 \dots n_{h-1}, n_h - 1, n_{h+1} \dots n_p =$$

$$= \frac{\Theta[u_i - (n_h - 1) M_{ih} - \sum_{k=1}^{k=p} n_k M_{ik} - M_{ih}] \Theta[u_i - (n_h - 1) M_{ih} + \sum_{k=1}^{k=p} n_k M_{ik} + M_{ih}]}{\Theta^2[u_i - (n_h - 1) M_{ih} - \sum_{k=1}^{k=p} n_k M_{ik}] \Theta^2[M_{ih}]}$$

B получается изъ A замѣной M_{ik} на $-M_{ik}$.

C вычисляется при помощи формулъ сложенія совершенно также, какъ и $F^{(t)}_{q-1}$. Вычисленіе $R n_1, n_2 \dots n_{h-1}, n_h - 1, n_{h+1} \dots n_p$ сводится къ вычисленію $R n_1, n_2 \dots n_{h-1}, n_h - 1, n_{h+1} \dots n_p$, $R n_1, n_2 \dots n_{h-1}, n_h - 2, n_{h+1} \dots n_p$ и т. д.

$R n_1, n_2 \dots n_{h-1}, 0, n_{h+1} \dots n_p$. Вычисленіе послѣдней функціи къ вычисленію $R n_1, n_2 \dots n_{h-1} - 1, 0, n_{h+1} \dots n_p$ и т. д.

Остается только опредѣлить

$$R_{1, 0 \dots 0} \text{ и } R_{0, 0 \dots 0}$$

для которыхъ уравненіе (130) даетъ слѣдующія значенія

$$R_{1, 0 \dots 0} = C_{1, 0 \dots 0}$$

$$R_{0, 0 \dots 0} = 1$$

K дается уравненіями (123), въ которыхъ при m не дѣлящемся на q:

$$\Omega^{(1)} = \Omega^{(r+1)}.$$

А потому

$$K = \frac{1}{2(q^r - 1)} \log R^{q^r - 1}(x^{(1)}, y^{(1)}) S^2_{r+1}(x^{(1)}, y^{(1)}) \qquad (143)$$

$$S_{r+1}(x^{(1)}, y^{(1)}) = \prod_{i=1}^{i=r} S^{(i)^{q^{r-1}}}(x^{(1)}, y^{(1)}), \qquad (144)$$

при $m = q^s n$

$$K = \frac{2}{2q^s(q^r - 1)} \log R^{q^s(q^r-1)}(x^{(1)}, y^{(1)}) S_s^{2(q^r-1)}(x^{(1)}, y^{(1)}) S_{r+s+1}(x^{(1)}, y^{(1)}) \qquad (145)$$

$$S_{r+s+1}(x^{(1)}, y^{(1)}) = \prod_{i=s+1}^{i=r+s} S^{(i)^{q^{r+s-i}}}(x^{(1)}, y^{(1)}), \qquad (146)$$

при $m = q^s$

$$K = \frac{1}{2q^r} \log R^{q^r}(x^{(1)}, y^{(1)}) S^2_{r+1}(x^{(1)}, y^{(1)}), \qquad (147)$$

$S_{r+1}(x^{(1)}, y^{(1)})$ имѣетъ значеніе (144).

Варшава,
6 сентября 1905 г.